

PA13 - Energie bas carbone, environnement et systèmes
énergétiques efficients.

Thermohydraulique des écoulements internes.

F. Ravelet^a

^a *Arts et Métiers Sciences et Technologie, LIFSE,*
151 boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris, France.
contact: florent.ravelet@ensam.eu

13 avril 2021

Table des matières

Objectifs	iv
I Notes de cours	1
1 Introduction	3
1.1 Exemple d'application industrielle	3
1.2 Limites de toute modélisation	5
2 Bilans dans un volume de contrôle fixe non matériel	7
2.1 Théorème de transport de Reynolds	7
2.2 Equation bilan généralisée sur un volume de contrôle fixe	10
2.3 Théorème de la divergence	11
2.4 Bilan de masse	12
2.5 Bilan de quantité de mouvement	12
2.6 Bilan d'énergie	13
Premier principe de la thermodynamique	13
Bilan dans un volume de contrôle	14
2.7 Equations locales dérivées : équation de l'énergie cinétique et de l'énergie interne	16
3 Application du bilan d'énergie totale à des composants d'un circuit fluide	18
3.1 Bilan de masse	18
3.2 Puissance mécanique technique, puissance de transvasement et enthalpie	19
3.3 Théorème de l'énergie cinétique, dissipation d'énergie mécanique et bilan d'énergie interne	20
3.4 Approximation d'écoulement quasi-uniforme en régime permanent : bilan enthalpique et relation de Bernoulli généralisée	20
Approximation de l'écoulement quasi-uniforme en régime permanent	20
Interprétation	21
Hypothèses usuelles pour différents composants	23
4 Utilisation du bilan intégral de quantité de mouvement	24
4.1 Bilan de quantité de mouvement dans l'approximation quasi-uniforme	24
5 Bilans 1D le long de l'axe de la conduite	26
5.1 Bilan de masse	27
5.2 Bilan de quantité de mouvement	27
5.3 Bilan d'énergie	28
5.4 En régime permanent	28
5.5 Modélisation du terme de friction	28
5.6 Lien entre friction pariétale et perte de charge	30

II Exercices	31
1 Exercices sur le bilan d'énergie	33
1.1 Facteur de correction pour l'énergie cinétique	33
1.2 Calcul du débit dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire	33
1.3 Rendement d'un ventilateur	33
1.4 Echauffement de l'eau dans une pompe	34
1.5 Puissance générée par une turbine hydraulique dans un barrage	34
2 Exercice sur le bilan intégral de quantité de mouvement	35
2.1 Perte de charge dans un élargissement brusque	35
3 Exercice sur les bilans 1D	36
3.1 Calcul de la caractéristique interne d'un canal chauffé	36
Détermination des débits limitants trois zones	36
Variations de pression le long de la conduite	38
3.2 Dégazage du lac de Nyos	40
Introduction	40
Gaz carbonique en solution : loi de Henry et approximation de la loi	41
Partie de la conduite fonctionnant en écoulement monophasique	41
Partie de la conduite fonctionnant en écoulement diphasique	42
III Annexes	45
A Propriétés thermodynamiques des fluides	47
A.1 Rappels sur le second principe et l'entropie	47
A.2 Loi d'état du gaz parfait	47
A.3 Changements de phase	49
A.4 Diagrammes thermodynamiques	50
A.5 Progiciels et données numériques	52
B Transferts thermiques dans les fluides	52
B.1 Modes de transfert de chaleur	52
Conduction	52
Convection	53
B.2 Utilisation des nombres adimensionnels et corrélations	53
Convection forcée	53
Convection naturelle	55
B.3 Transferts en ébullition	56
Ébullition libre	56
Ébullition convective	57
C Bilans en écoulements multiphasiques	59

C.1	Simplification des équations de bilan moyennées sur la section de la conduite . .	59
C.2	Paramètres propres aux écoulements multiphasiques	60
C.3	Configurations des écoulements diphasiques	61
C.4	Cartes de prédiction des régimes	63
C.5	Bilan de masse	64
C.6	Bilan de quantité de mouvement	64
C.7	Bilan d'énergie	65
C.8	Détermination de la fraction volumique	65
C.9	Détermination de la friction	66
	Friction en modèle homogène	66
	Autres modèles de friction pour écoulements diphasiques	67
	Méthode de Lockhart & Martinelli	67
	Compléments	68
	Bibliographie	71

Objectifs

- Etablir des lois de bilans sur des volumes de contrôle ouverts (chapitre I.2.2).
- Connaître les hypothèses utilisées pour établir le bilan d'énergie totale intégré sur un volume de contrôle géométrique fixe non matériel : expression du tenseur des contraintes d'un fluide newtonien, approximation d'écoulement quasi-uniforme, termes négligés dans le bilan (chapitres I.3.2 et I.3.4).
- Utiliser le bilan d'énergie totale pour modéliser un composant d'un circuit fluide où ont lieu des échanges de travail ou de chaleur avec l'extérieur. Faire le lien avec l'enthalpie et utiliser des tables thermodynamiques (exercices du II.1).
- Reconnaître les différentes formes d'énergie mécanique pour un écoulement fluide : pression, énergie cinétique, énergie potentielle (chapitre I.2.7).
- Utiliser le bilan d'énergie mécanique ou relation de Bernoulli généralisée pour déterminer les puissances récupérables sur des turbines ou les besoins d'apport d'énergie par des pompes (exercices du II.1).
- Connaître quelques mécanismes à l'origine de dissipation d'énergie mécanique (travail des efforts internes) : friction visqueuse sur des parois (chapitres I.5.5 et I.5.6), pertes d'énergie cinétique par mélange (exercice II.2.1).
- Utiliser le bilan de quantité de mouvement intégré en volume pour déterminer la résultante des forces extérieures associées à un écoulement (chapitre I.4).
- Utiliser le bilan de quantité de mouvement intégré sur une section de tuyau pour déterminer le gradient de pression dans un écoulement interne (exercice II.3.2).
- Traiter des problèmes simples de thermohydraulique en couplant bilan d'énergie totale, bilan de quantité de mouvement et bilan de masse (exercice II.3.1).

Première partie
Notes de cours

1 Introduction

L'objectif principal de ce cours est de montrer comment on peut mettre en place des modèles unidimensionnels de circuits fluides incluant des éléments où se produisent des échanges de chaleur et de travail avec le milieu extérieur. La résolution des équations obtenues a pour but de déterminer les grandeurs caractérisant l'écoulement de ces fluides (débits, fractions volumiques), les grandeurs caractérisant l'état thermodynamique des fluides (températures, pressions, titres thermodynamiques), ainsi que les travaux et chaleurs échangés dans les différents éléments du circuit.

1.1 Exemple d'application industrielle

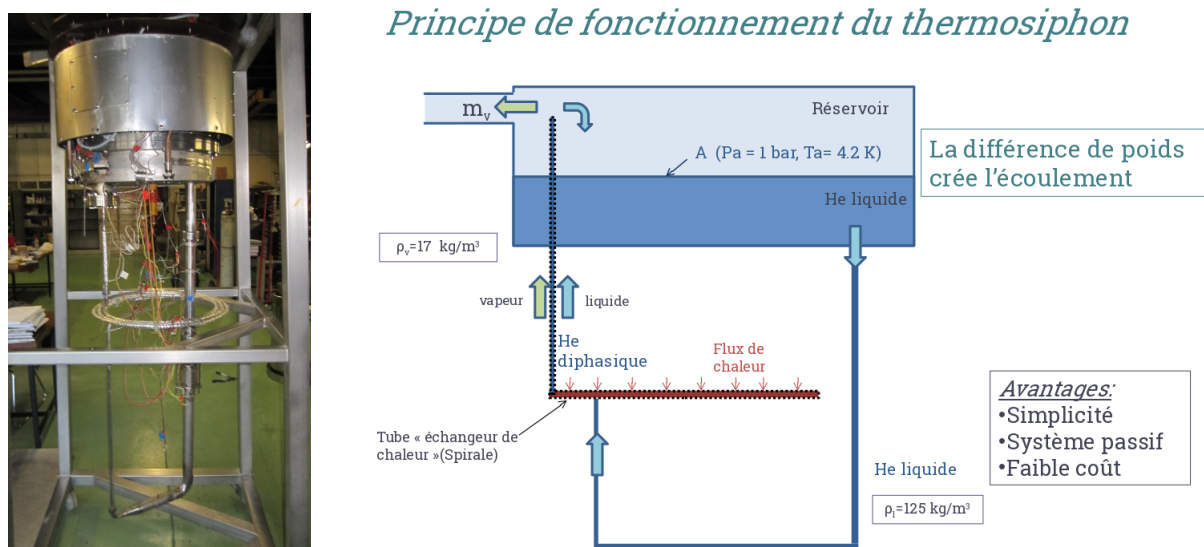


FIGURE 1 – Refroidissement par thermosiphon diphasique en hélium liquide

Nous prendrons comme exemple le circuit illustré en Fig. 1. Le problème est de maintenir à très basse température, proche du zéro absolu, des aimants supraconducteurs. Pour ce faire, on utilise de l'hélium liquide dont le point d'ébullition est à 4.2 K à pression ambiante. Un réservoir situé en hauteur est alimenté en hélium liquide. Un tube conduit ce fluide à l'échangeur situé en dessous. La sortie de l'échangeur est un tube débouchant dans le réservoir au dessus du niveau d'hélium liquide. Le dispositif envisagé ne nécessite pas de pompe pour faire circuler l'hélium : c'est la différence de densité entre le réservoir d'hélium liquide et la partie ascendante où l'hélium s'est en partie vaporisé qui crée le mouvement. La question est de déterminer en fonction des géométries du circuit et du flux de chaleur à l'échangeur le débit qui circule.

Nécessité d'une modélisation

Le principe de fonctionnement est simple. Toutefois, la variation de pression dans les conduites inclut des « pertes de charge » qui dépendent de la vitesse de l'écoulement, et la quantité de fluide vaporisé à flux de chaleur donné dépend du débit massique. Or, cette quantité vaporisée conditionne la variation de la masse volumique et donc joue sur le débit. On a ainsi un couplage entre les différentes variables du problème.

Les mécanismes gouvernant ce type d'écoulement sont au carrefour de plusieurs disciplines. Il s'agit en effet de mécanique des fluides couplée à de la thermique et de la thermodynamique

des changements de phase.

En outre, dans cet exemple, une partie de l'écoulement est diphasique : on a coexistence des phases liquide et vapeur de l'hélium. Les écoulements multiphasiques en conduite peuvent présenter plusieurs configurations telles que des cas où une phase est finement dispersée dans une autre (bulles, petites particules) ou bien des cas où les phases sont présentes sous forme de strates (eau et huile dans une conduite horizontale), comme illustré en Fig. 2. On sent bien la difficulté de décrire précisément avec un seul modèle une telle variété de situations.

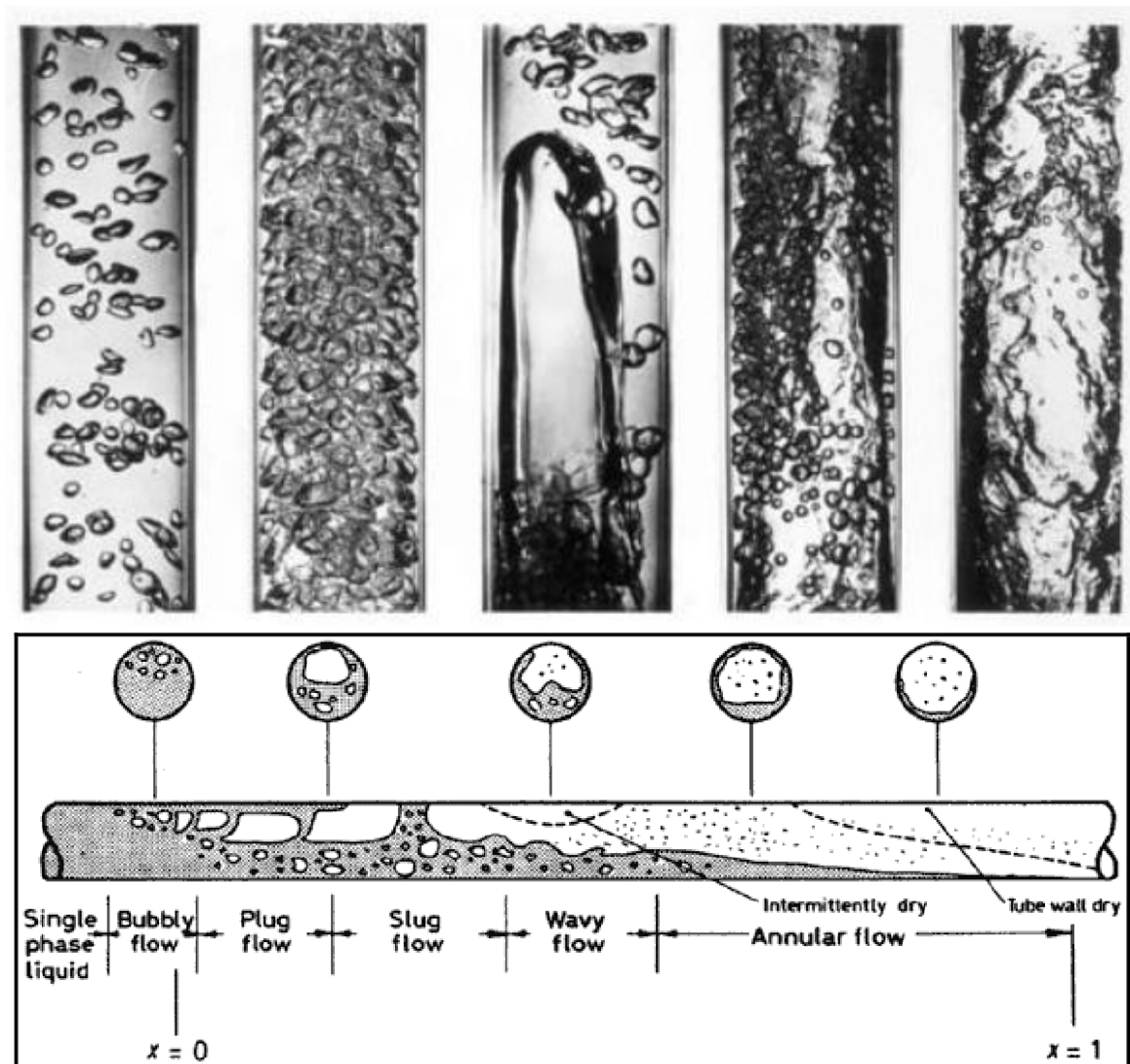


FIGURE 2 – En haut : photographies d'un écoulement co-courant ascendant liquide / gaz pour différents débits de gaz et de liquide illustrant différents régimes d'écoulement en conduite. De gauche à droite : écoulement à bulles dispersées, à bulles agglomérées, à poches, pulsatile et annulaire dispersé. En bas : écoulement horizontal chauffé à la paroi ; x est le titre en vapeur, l'écoulement se fait de gauche à droite

Remarques sur les grandeurs d'intérêt pratique et sur les grandeurs accessibles à la mesure

Une des questions principales à se poser, du point de vue de l'ingénierie, est le type d'informations que l'on souhaite extraire de la description de l'écoulement : par exemple, a-t-on absolument besoin d'avoir accès aux champs de vitesse en chaque point de l'espace, à tout instant, ou bien souhaite-t-on connaître le débit à travers une section en régime permanent ? On doit alors faire appel à de nombreuses approximations et à des modèles différents selon le degré de finesse de la description que l'on souhaite.

En outre, du point de vue expérimental, si des méthodes de mesures très sophistiquées permettent des mesures précises, résolues en temps et en espace et non intrusives des vitesses en écoulement monophasique, c'est loin d'être le cas pour les températures où la résolution temporelle est limitée ; et pour les pressions où les mesures non intrusives se limitent aux pressions pariétales. Les possibilités de mesures locales sont encore plus limitées pour les écoulements polyphasiques. On ne pourra ainsi bien souvent valider expérimentalement que des grandeurs intégrales (débit, fraction volumique moyenne).

Enfin, la résolution, y compris au moyen de calculs numériques, des équations différentielles partielles que l'on obtient en utilisant l'approche de la mécanique des milieux continus et la thermodynamique des systèmes en équilibre statistique, et qui décrivent de manière correctes l'évolution des milieux auxquels on s'intéresse, est de plus extrêmement coûteuse en temps de calcul et génère des masses importantes de données à traiter. Elle est pourtant très utile pour par exemple valider des corrélations employées dans les modèles décrits par la suite.

1.2 Limites de toute modélisation

Un modèle est une représentation d'une réalité restreinte de la nature. Un modèle est fait pour décrire, interpréter et prévoir des événements dans le cadre de cette réalité et ne s'applique qu'à un nombre limité de phénomènes. Un modèle n'est pas la réalité.

Le modèle se substitue parfois à la théorie à cause de sa simplicité relative. Il a donc comme rôle de décrire une réalité complexe de manière simple et compréhensible. Par exemple, en chimie, on peut expliquer bien des réactions à partir du modèle atomique simplifié, sans avoir à utiliser la théorie de la mécanique quantique. Pour citer M. Planck (1963) :

« Que nous déclarions avec Ptolémée : la Terre est le centre immobile de l'univers et le Soleil tourne autour d'elle avec toutes les étoiles, ou que nous disions avec Copernic, la Terre est un grain de poussière dans le cosmos qui tourne en un jour sur lui-même et en un an autour du Soleil, ces deux assertions ne sont [...] que deux manières différentes de formuler des observations ». On préfère généralement prendre le modèle héliocentré pour décrire le mouvement de la planète Mars par commodité.

Enfin, il faut garder à l'esprit que les modèles employés ne sont souvent valides que dans des gammes restreintes de paramètres. Voici deux exemples significatifs, en écoulements monophasiques, de considérations très pratiques mais s'avérant fausses dans le cas du génie nucléaire, où les variations de températures et de pressions dans les différents circuits sont très fortes :

— L'eau est « incompressible » : le débit volumique se conserve.

Faux : pour le circuit primaire d'une centrale nucléaire, la masse volumique de l'eau à 155 bars varie de 10% entre 280°C et 320°C¹. Le débit volumique ne se conserve donc pas.

Seul le débit massique se conserve. D'ailleurs, aucun fluide n'est « incompressible », on ne

1. D'après le NIST (<http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/>), à 155 bars et 280°C, $\rho = 764.3 \text{ kg.m}^{-3}$ et à 155 bars et 320°C, $\rho = 680.2 \text{ kg.m}^{-3}$

devrait jamais parler que de fluide en *écoulement* compressible ou incompressible.

— La vapeur d'eau est un gaz parfait.

A 1 bar et 100°C, c'est quasiment le cas : le calcul de la masse volumique pour un gaz parfait de constante $r = 462 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ donne $\rho = 5.8 \text{ kg.m}^{-3}$ et la mesure $\rho = 5.9 \text{ kg.m}^{-3}$ soit 1.5% d'écart.

Mais à 60 bars et 275°C (pression en sortie du générateur de vapeur dans un Réacteur à Eau sous Pression du palier 900 MWe) ce n'est plus du tout vrai : le calcul pour un gaz parfait donne une masse volumique $\rho_v = 23.7 \text{ kg.m}^{-3}$ alors qu'en réalité elle est de 30.8 kg.m^{-3} , soit un écart de 30%.

De ce qui précède, on peut conclure que la modélisation des écoulements en conduite doit être maniée avec un grand sens critique.

2 Bilans dans un volume de contrôle fixe non matériel

On s'intéresse à des systèmes matériels décrits par la mécanique des milieux continus. On suppose que la thermodynamique classique à l'équilibre (Balian, 2003) s'applique à des systèmes en mouvement. Il suffira alors d'ajouter à l'énergie interne microscopique l'énergie cinétique macroscopique. Au sens thermodynamique, un tel système peut être :

- *Fermé* : pas d'échange de matière avec l'extérieur ;
- *Ouvert* : échange possible de matière à travers ses frontières ;
- *Mécaniquement isolé* : pas d'action extérieure ;
- *Adiabatique* : pas d'échange de chaleur avec l'extérieur
- *Thermodynamiquement isolé* : pas d'échange de travail ni de chaleur ni de matière.

On utilisera trois lois de conservation, établies pour des *systèmes matériels*, c'est-à-dire des systèmes *constitués des mêmes particules à chaque instant* ou encore *fermés* au sens thermodynamique :

- **La conservation de la masse.**
- **La conservation de la quantité de mouvement ou principe fondamental de la dynamique.**
- **La conservation de l'énergie ou premier principe de la thermodynamique.**

Dans nos problèmes on considérera des systèmes ouverts, avec des entrées et des sorties, et on travaillera donc plutôt sur des régions de l'espace fixes, que l'on nommera *volumes de contrôle géométriques fixes non matériels*. Il faudra alors exprimer les lois de conservations sous forme de bilan pour un volume de contrôle.

La conservation du moment cinétique n'est pas abordée ici, et le sera dans le cadre des cours sur les turbomachines.

2.1 Théorème de transport de Reynolds

Le lien entre le taux de variation temporelle d'une grandeur extensive pour un système matériel coïncidant à l'instant t avec un volume de contrôle s'exprime au moyen du théorème de transport de Reynolds.

Définitions : volume de contrôle, système matériel

Un volume de contrôle est un volume défini arbitrairement, avec une *surface fermée* (la surface de contrôle), séparant l'univers en deux parties : celle contenue dans le volume de contrôle, et le reste de l'univers. Il peut être fixe ou mobile, éventuellement déformable, sa frontière étant animée d'une vitesse $\vec{v}_s(\vec{x}, t)$ définie arbitrairement.

Un cas particulier de volume de contrôle est le volume de contrôle *matériel*, qui correspond à un système matériel : dans ce cas, la frontière est *impermeable* et on a le lien suivant entre la vitesse des particules situées sur la frontière $\vec{u}(\vec{x}, t)$ et la vitesse de cette frontière, \vec{n} étant la normale sortante du volume de contrôle :

$$\text{Pour un volume de contrôle matériel : } \vec{v}_s \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n}$$

Théorème de transport de Reynolds

Pour toute grandeur macroscopique $\mathcal{G}(\vec{x}, t)$ définie sur un volume de contrôle *matériel* $\mathcal{D}(t)$ constituant le système matériel auquel on s'intéresse, on note $g(\vec{x}, t)$ la grandeur volumique associée (Lallemand, 2015) :

$$\mathcal{G}(\vec{x}, t) = \int_{\mathcal{D}(t)} g(\vec{x}, t) dv$$

On définit un *volume de contrôle géométrique non matériel* $\mathcal{V}(t)$, de frontière $\partial\mathcal{V}(t)$, **coïncidant à l'instant t** avec le système *matériel* $\mathcal{D}(t)$

S'il n'y a pas de surface de discontinuité (choc ou interface entre deux fluides par exemple), le taux de variation dans le temps de $\mathcal{G}(\vec{x}, t)$ s'écrit alors, en notant $\vec{u}(\vec{x}, t)$ le champ de vitesse des particules :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{G}(\vec{x}, t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial g}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

Démonstration

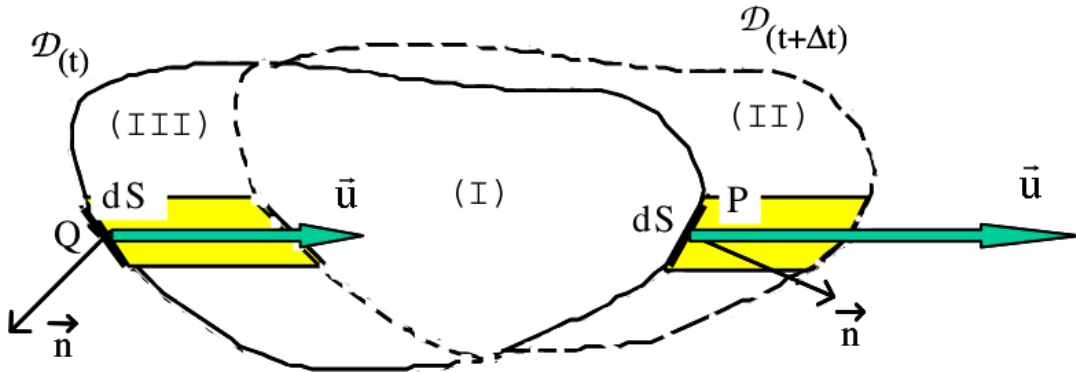


FIGURE 3 – Illustration du théorème de transport de Reynolds

Par définition de la dérivée :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} g(\vec{x}, t) dv = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\mathcal{D}(t+\Delta t)} g(\vec{x}, t + \Delta t) dv - \int_{\mathcal{D}(t)} g(\vec{x}, t) dv \right\}$$

La situation est illustrée en Fig. 3. A l'instant $t + \Delta t$, le système matériel est contenu dans le volume $\mathcal{D}(t + \Delta t)$ qui est l'union des volumes I et II sur la figure. A l'instant t , le système matériel était contenu dans le volume $\mathcal{D}(t) = \mathcal{V}(t)$ qui est l'union des volumes I et III sur la figure. On peut donc écrire :

$$\mathcal{D}(t + \Delta t) - II = \mathcal{V}(t) - III$$

$$\mathcal{D}(t + \Delta t) = \mathcal{V}(t) + II - III$$

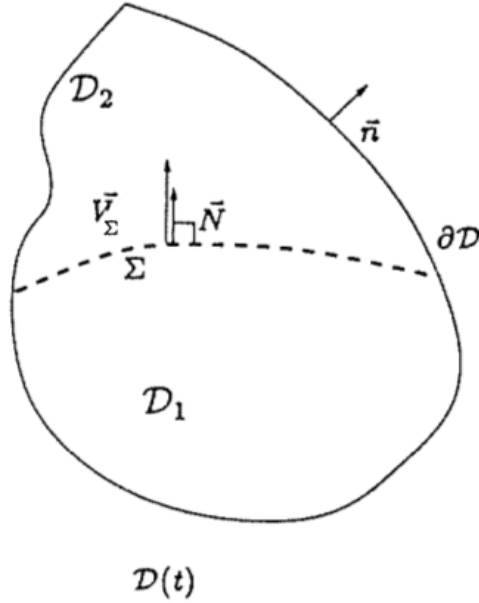


FIGURE 4 – Système matériel $\mathcal{D}(t)$, avec sa surface extérieure $\partial\mathcal{D}(t)$, constitué de deux sous-domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 séparés par une surface de discontinuité Σ , animée d'une vitesse \vec{V}_Σ , de normale \vec{N}

Et donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} g(\vec{x}, t) dv = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \underbrace{\int_{\mathcal{V}(t)} g(\vec{x}, t + \Delta t) dv}_1 + \underbrace{\int_{II} g(\vec{x}, t + \Delta t) dv}_2 \right. \\ \left. - \underbrace{\int_{III} g(\vec{x}, t + \Delta t) dv}_3 - \underbrace{\int_{\mathcal{V}(t)} g(\vec{x}, t) dv}_4 \right\}$$

On a donc décomposé la dérivée en 4 termes. Pour le deuxième terme, soit l'intégrale sur le volume II , en se rappelant comment on calcule le volume d'un prisme, l'élément de volume au voisinage du point P , pour Δt petit, a pour valeur :

$$dv = u(\vec{P}) \Delta t \cdot \vec{n} ds$$

Dans le cas du troisième terme, soit l'intégrale sur le volume III , l'élément de volume au voisinage du point Q , pour Δt petit, a pour valeur :

$$dv = -u(\vec{Q}) \Delta t \cdot \vec{n} ds$$

On peut donc substituer ces éléments dans les termes 2 et 3 de l'équation, en les exprimant comme des intégrales de surface sur les surfaces qui vont balayer les volumes II et III pendant le temps Δt . L'union de ces deux surfaces est justement la surface frontière du domaine au temps t : $\mathcal{V}(t)$. On a donc :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{2 - 3\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\partial\mathcal{V}(t)} g\vec{u} \cdot \vec{n} ds \Delta t = \int_{\partial\mathcal{V}(t)} g\vec{u} \cdot \vec{n} ds$$

Dans les termes 1 et 4, on reconnaît la définition de la dérivée partielle de g par rapport au temps :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{1 - 4\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{1}{\Delta t} (g(\vec{x}, t + \Delta t) - g(\vec{x}, t)) dv = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial g}{\partial t} dv$$

D'où le résultat. Pour plus de généralité, on peut inclure une surface de discontinuité (voir Fig. 4). Le théorème de transport de Reynolds en tenant compte du saut ($\llbracket \cdot \rrbracket$) de la grandeur g de part et d'autre de la surface de discontinuité s'écrit alors (Le Tallec, 2009) :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(\vec{x}, t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial g}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{V}(t)} g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds - \int_{\Sigma} \llbracket g(\vec{u} - \vec{V}_{\Sigma}) \cdot \vec{N} \rrbracket ds$$

Interprétation

Le théorème de transport de Reynolds peut s'exprimer comme suit :

« **Le taux de variation temporel de la propriété \mathcal{G} du système matériel est égal à la somme de l'intégrale du taux de variation temporel de \mathcal{G} dans le volume de contrôle et du flux net sortant de g à travers la surface du volume de contrôle** ».

Le flux net sortant de g à travers la surface du volume de contrôle représente le bilan entre ce qui entre et ce qui sort, à cause du transport par un écoulement à travers les surfaces. Si on note Φ_e le flux entrant et Φ_s le flux sortant (voir Fig. 5), on a :

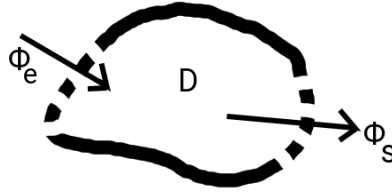


FIGURE 5 – Volume de contrôle avec une entrée et une sortie

$$\Phi_s - \Phi_e = \int_{\partial \mathcal{V}} g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

2.2 Equation bilan généralisée sur un volume de contrôle fixe

On va s'intéresser principalement à des volumes de contrôle fixes non matériels \mathcal{V} , de frontière immobile $\partial \mathcal{V}$.

On utilisera des lois générales de bilans écrites pour une grandeur attachée à un système matériel $\mathcal{D}(t)$ coïncidant à t avec le volume de contrôle :

Pour un système matériel, une variation au cours du temps de la grandeur considérée peut avoir deux causes :

- Une source en volume de création ou destruction de la grandeur, notée P_g .
- Une source de création ou disparition de la grandeur à travers les surfaces, par d'autres processus que le transport convectif. On trouvera en particulier sous ce terme les processus *diffusifs* d'origine moléculaire. Le terme source de la grandeur g à la surface est noté ici γ . Ce terme est associé en général à des processus d'origine moléculaire microscopiques (diffusion moléculaire, viscosité, conduction thermique). On fait usuellement l'hypothèse

que le terme surfacique γ ne dépend que de la normale sortante \vec{n} sur la surface $\partial\mathcal{D}(t)$. On montre qu'il existe alors un vecteur flux Φ_g tel que :

$$\gamma = \Phi_g \cdot \vec{n}$$

Cette hypothèse est analogue au postulat de Cauchy dans la définition du tenseur des contraintes (Le Tallec, 2009).

Tout l'enjeu de la suite est d'exprimer les termes sources à partir des principes fondamentaux de la dynamique et du premier principe de la thermodynamique. On écrira donc :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} g dv = \int_{\mathcal{V}} P_g dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \Phi_g \cdot \vec{n} ds$$

On utilise le théorème de transport de Reynolds pour exprimer le premier terme comme des intégrales sur le volume de contrôle, ce qui fait apparaître un terme supplémentaire. Il correspond à un flux net à travers la frontière du volume de contrôle, à cause du transport de la grandeur à l'échelle macroscopique par l'écoulement entrant ou sortant du volume de contrôle. On parle de *transport convectif*. On écrira donc :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial g}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{V}} g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \int_{\mathcal{V}} P_g dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \gamma ds$$

$$\text{Accumulation au cours du temps} + \text{Flux net sortant} = \sum \text{Sources}$$

On montre également que sur une surface de discontinuité (voir Fig. 4), on a :

$$\llbracket g (\vec{u} - \vec{V}_\Sigma) \cdot \vec{N} \rrbracket - \llbracket \Phi_g \cdot \vec{N} \rrbracket = 0 \text{ sur } \Sigma$$

L'expression générale d'un bilan dans un volume de contrôle fixe non matériel, avec une éventuelle surface de discontinuité est :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial g}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{V}} g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \int_{\mathcal{V}} P_g dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \Phi_g \cdot \vec{n} ds}$$

$$\boxed{\llbracket g (\vec{u} - \vec{V}_\Sigma) \cdot \vec{N} \rrbracket - \llbracket \Phi_g \cdot \vec{N} \rrbracket = 0 \text{ sur } \Sigma}$$

2.3 Théorème de la divergence

Pour tout ce qui concerne l'algèbre tensorielle, vous pouvez consulter Garrigues (2016).

Pour un champ de vecteurs \vec{a} défini sur un domaine fermé \mathcal{A} et sur sa frontière $\partial\mathcal{A}$, on a, avec div l'opérateur divergence :

$$\int_{\mathcal{A}} \text{div}(\vec{a}) dv = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{a} \cdot \vec{n} ds$$

L'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs \vec{a} dans un volume fermé est égale au flux du vecteur à travers la frontière.

De même pour un champ tensoriel d'ordre 2 $\bar{\bar{T}}$:

$$\int_{\mathcal{A}} \text{div}(\bar{\bar{T}}) dv = \int_{\partial\mathcal{A}} \bar{\bar{T}} \cdot \vec{n} ds$$

2.4 Bilan de masse

La grandeur d'intérêt est la masse totale M . Si on appelle ρ la masse volumique, on a :

$$M = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho dv$$

En absence de réaction nucléaire, **la masse d'un système matériel se conserve**. Il n'y a donc pas de termes sources. On applique alors le bilan général du § I.2.2 avec :

$$\begin{aligned} g &= \rho \\ \Phi_g &= 0 \\ P_g &= 0 \end{aligned}$$

Le bilan de masse¹ s'écrira donc :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = 0} \quad (2.1)$$

Ceci est la forme intégrée. Elle est valable pour tout volume de contrôle ; en utilisant le théorème de la divergence on peut exprimer la forme locale du bilan :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0}$$

2.5 Bilan de quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique écrit pour un système matériel est :

« **Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le système matériel** ».

Ces forces peuvent être de deux types : des forces exercées en volume à distance par un champ, et des forces de contact exercées sur la frontière.

On rappelle que la quantité de mouvement du volume \mathcal{D} est : $\vec{\mathcal{P}} = \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{u} dv$. Le terme de production en volume correspond aux efforts extérieurs appliqués en volume de densité volumique \vec{f} . En pratique on ne considérera que la force de pesanteur $\vec{f} = \rho \vec{g}$. Le terme correspondant aux densités surfaciques de forces de contact sera modélisé par le tenseur des contraintes de Cauchy $\bar{\bar{\sigma}}$.

On rappelle que la force exercée par le milieu situé du côté de la normale \vec{n} sur un élément de surface ds est :

$$d\vec{F} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} ds$$

Le tenseur des contraintes peut être décomposé en une partie isotrope, dont on montre qu'elle correspond à la pression hydrostatique p , et une partie déviatorique liée aux contraintes visqueuses :

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\mathbb{I} + \bar{\bar{\sigma}}_v$$

1. Vérifier que les termes de l'équation 2.1 sont homogènes à un débit massique (kg.s^{-1})

Pour un fluide newtonien, la contrainte de cisaillement est proportionnelle au tenseur des taux de déformation² :

$$\begin{aligned}\bar{\bar{D}} &= \frac{1}{2} \left((\vec{\nabla} \otimes \vec{u}) + (\vec{\nabla} \otimes \vec{u})^T \right) \\ \bar{\bar{\sigma}}_v &= 2\mu\bar{\bar{D}} + \mu' (\text{div}\vec{u}) \mathbb{I}\end{aligned}$$

Dans cette expression, μ est la viscosité dynamique mesurée en Pa.s, et μ' est le coefficient de seconde viscosité, qui d'une part a une contribution nulle en écoulement incompressible où on montre à partir du bilan de masse que $\text{div}\vec{u} = 0$, et qui d'autre part vaut d'après l'hypothèse de Stokes $\mu' = -\frac{2}{3}\mu$ (résultat exact pour un gaz parfait monoatomique).

On identifie donc, dans l'expression générale du bilan :

$$\begin{aligned}g &= \rho\vec{u} \\ \Phi_g &= -p\mathbb{I} + \bar{\bar{\sigma}}_v \\ P_g &= \rho\vec{g}\end{aligned}$$

Le bilan de quantité de mouvement³ s'écrira donc sous forme intégrale :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho\vec{u}}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \rho\vec{u} \otimes (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \int_{\mathcal{V}} \rho\vec{g} dv - \int_{\partial\mathcal{V}} p\bar{\bar{I}} \cdot \vec{n} ds + \int_{\partial\mathcal{V}} \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \vec{n} ds} \quad (2.2)$$

Et sous forme locale :

$$\boxed{\frac{\partial \rho\vec{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \text{div}\bar{\bar{\sigma}}_v}$$

2.6 Bilan d'énergie

Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe est la traduction en termes thermodynamiques de la **conservation de l'énergie**. L'énergie totale d'un système isolé est constante : on ne peut que transformer certaines formes d'énergie en d'autres formes d'énergie. Les mécaniciens ont introduit au début du 19^e siècle la notion de travail d'une force, d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Il existe des forces *conservatives*, *i.e.* qui dérivent d'un potentiel, comme les forces de pesanteur ou électrostatiques. Dans ce cas, on peut leur associer une énergie potentielle dont la forme différentielle est une différentielle totale exacte : dans une transformation entre un état initial et un état final, la variation de l'énergie potentielle est l'opposé du travail de cette force et ne dépend pas du chemin suivi. Certaines forces sont non conservatives : elles ne dérivent pas d'un potentiel, et leur travail dépend de la transformation qui amène d'un état initial à un état final. C'est par exemple le cas des forces de frottement fluide, qui dépendent de la vitesse.

Une meilleure compréhension physique de la notion de chaleur, souvent confondue avec la température, est un des fruits de la physique du 19^e siècle. Les expériences de calorimétrie de Joule (voir Fig. 6) ont montré que la somme du travail et de la chaleur se conserve pour un système fermé, et ne dépend pas de la transformation considérée.

2. Le symbole $\vec{\nabla}$ est l'opérateur *gradient* et \otimes désigne le produit tensoriel
3. Vérifier que les termes de l'équation 2.2 sont homogènes à une force (N)



FIGURE 6 – *Expérience de Joule : dans un système adiabatique, n'échangeant que du travail avec l'extérieur, Joule mesure l'élévation de température due au travail des pales d'un agitateur, et montre que $W = Q$. (image issue de : <http://www.wikipedia.org>)*

Tout ceci se traduit par l'existence d'une fonction d'état \mathcal{E} , extensive et se conservant pour un système isolé. On l'appelle *énergie interne* du système. Elle rend compte de l'état interne du système à l'échelle microscopique (c'est là qu'intervient la physique statistique). Sous forme différentielle, on a pour une transformation infinitésimale d'un système matériel, avec \mathcal{E} l'énergie interne, E_k l'énergie cinétique macroscopique, δW le travail élémentaire de *toutes*⁴ les forces extérieures et δQ la quantité de chaleur élémentaire échangée avec le milieu extérieur au système (par conduction, convection ou rayonnement) :

$$d\mathcal{E} + dE_k = \delta Q + \delta W$$

Bilan dans un volume de contrôle

Le premier principe de la thermodynamique pour un système matériel peut s'énoncer :

« La dérivée par rapport au temps de la somme de l'énergie interne \mathcal{E} et de l'énergie cinétique macroscopique E_k est égale à la somme des puissances des efforts externes \dot{W} et du taux de chaleur fourni au système \dot{Q} ».

Ce dernier a deux origines possibles : un terme volumique (rayonnement) r , et un terme d'apport surfacique \vec{q} (flux de chaleur par unité de surface et de temps). La direction de \vec{q} est définie de sorte que si le système *reçoit* de la chaleur, \vec{q} est dirigé *vers* le domaine. Quelques compléments sur les modes de transferts thermiques et des exemples de corrélations liant densité de flux de chaleur et écarts de températures entre fluide et paroi pour les écoulements internes sont abordés en annexe III.B.

En notant e l'énergie interne par unité de masse, et en utilisant pour les efforts les mêmes

4. On peut aussi séparer les forces extérieures conservatives dérivant d'une énergie potentielle E_p et les forces extérieures non conservatives. Dans ce cas, le premier principe s'écrira :

$$d\mathcal{E} + dE_k + dE_p = \delta Q + \delta W_{nc}$$

avec δW_{nc} le travail des forces non conservatives.

notations que pour le bilan de quantité de mouvement, on identifie :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} + E_k &= \int_{\mathcal{D}} \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 dv \\ g &= \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \\ \Phi_g &= \bar{\sigma} \cdot \vec{u} - \vec{q} \\ P_g &= \rho \vec{g} \cdot \vec{u} + r\end{aligned}$$

Le bilan⁵ s'écrit sous forme intégrale :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right\} dv + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{g} \cdot \vec{u} dv - \int_{\partial \mathcal{V}} p \vec{u} \cdot \vec{n} ds + \int_{\partial \mathcal{V}} (\bar{\sigma}_v \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} ds}_{\dot{W}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} r dv - \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{q} \cdot \vec{n} ds}_{\dot{Q}}} \quad (2.3)$$

Et sous forme locale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right\} + \operatorname{div} \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \vec{u} \right\} = \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \operatorname{div} (p \vec{u}) + \operatorname{div} (\bar{\sigma}_v \cdot \vec{u}) + r - \operatorname{div} \vec{q}$$

On peut montrer, à partir de l'identité vectorielle $\operatorname{div} (a \vec{b}) = a \operatorname{div} \vec{b} + (\vec{\nabla} a) \cdot \vec{b}$, en remarquant que la force de pesanteur dérive du gradient d'un potentiel indépendant du temps⁶ et en utilisant le bilan de masse, la relation suivante :

$$\rho \vec{g} \cdot \vec{u} = -\operatorname{div} (\rho g z \vec{u}) - \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho (g z) \}$$

Donc, une expression équivalente du bilan sous forme locale est :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 + g z \right) \right\} + \operatorname{div} \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 + g z \right) \vec{u} \right\} = -\operatorname{div} (p \vec{u}) + \operatorname{div} (\bar{\sigma}_v \cdot \vec{u}) + r - \operatorname{div} \vec{q}}$$

On a ainsi inclus l'énergie potentielle de pesanteur par unité de masse dans le bilan, et on retrouve ainsi un autre énoncé du premier principe :

« La dérivée par rapport au temps de l'énergie *totale*, somme de l'énergie interne, de l'énergie cinétique macroscopique et de l'énergie potentielle est égale à la somme des puissances des forces externes *non conservatives* \dot{W}_{nc} et du taux de chaleur fourni au système \dot{Q} » :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 + g z \right) \right\} dv + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 + g z \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \underbrace{- \int_{\partial \mathcal{V}} p \vec{u} \cdot \vec{n} ds + \int_{\partial \mathcal{V}} (\bar{\sigma}_v \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} ds}_{\dot{W}_{nc}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} r dv - \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{q} \cdot \vec{n} ds}_{\dot{Q}}} \quad (2.4)$$

5. Vérifier que les termes de l'équation 2.4 sont homogènes à une puissance (W)

6. $\vec{g} = \vec{\nabla} (-gz)$, avec z une coordonnée le long d'un axe vertical orienté vers le haut

2.7 Equations locales dérivées : équation de l'énergie cinétique et de l'énergie interne

Pour un système matériel, le « théorème de l'énergie cinétique » stipule que **la variation temporelle de l'énergie mécanique —somme de l'énergie cinétique et potentielle— est égale à la somme de la puissance des forces extérieures non conservatives et de la puissance des forces intérieures**. Il ne s'agit pas d'un principe de conservation supplémentaire, mais plutôt d'une conséquence du principe fondamental de la dynamique : on l'obtient en multipliant scalairement l'équation de bilan de quantité de mouvement sous forme locale par \vec{u} .

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \left(\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) \right) &= \vec{u} \cdot \left(\rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \operatorname{div} \bar{\bar{\sigma}}_v \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} \right) &= \rho \vec{g} \cdot \vec{u} - \operatorname{div}(p \vec{u}) + \operatorname{div}(\bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \vec{u}) \\ &\quad + p \operatorname{div}(\vec{u}) - (\bar{\bar{\sigma}}_v : \vec{\nabla} \vec{u}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{1}{2} u^2 + gz \right) \right) + \operatorname{div} \left(\rho \left(\frac{1}{2} u^2 + gz \right) \vec{u} \right) &= -\operatorname{div}(p \vec{u}) + \operatorname{div}(\bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \vec{u}) \\ &\quad + p \operatorname{div}(\vec{u}) - (\bar{\bar{\sigma}}_v : \vec{\nabla} \vec{u}) \end{aligned}$$

En intégrant l'équation locale sur le volume de contrôle, on obtient l'équation associée à l'énoncé du « théorème de l'énergie cinétique » :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + gz \right) \right\} dv + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + gz \right) (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \underbrace{\dot{W}_{nc} + \int_{\mathcal{V}} p \operatorname{div}(\vec{u}) dv - \int_{\mathcal{V}} (\bar{\bar{\sigma}}_v : \vec{\nabla} \vec{u}) dv}_{\text{Puissance des forces intérieures}}} \quad (2.5)$$

Pour un fluide newtonien de viscosité dynamique μ , le dernier terme s'écrira $\bar{\bar{\sigma}}_v : \vec{\nabla} \vec{u} = 2\mu (\bar{\bar{D}})^2$ et est donc strictement positif. La puissance des forces intérieures met en jeu deux contributions :

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} p \operatorname{div}(\vec{u}) dv - \int_{\mathcal{V}} (\bar{\bar{\sigma}}_v : \vec{\nabla} \vec{u}) dv}_{\text{Puissance des forces intérieures}} = \dot{W}_{comp} - \dot{W}_{mech loss}$$

- la première correspond à de l'énergie élastique emmagasinée par le fluide dans le volume de contrôle et est liée à la compressibilité ; elle est nulle en écoulement incompressible, et peut être positive dans le cas d'une détente ou négative dans le cas d'une compression. On la notera :

$$\dot{W}_{comp} = \int_{\mathcal{V}} p \operatorname{div}(\vec{u}) dv$$

- la seconde est toujours négative et correspond à la puissance des forces de frottement internes dans le volume de contrôle. Elle aura tendance à réduire l'énergie mécanique. On

notera $\dot{W}_{mech\ loss}$ sa valeur absolue :

$$\dot{W}_{mech\ loss} = \int_{\mathcal{V}} (\bar{\bar{\sigma}}_v : \vec{\nabla} \vec{u}) \, dv$$

En soustrayant les équations 2.4 et 2.5, on obtient un bilan d'énergie interne, sous forme intégrale :

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \{\rho e\} \, dv + \int_{\partial \mathcal{V}} \rho e (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, ds = \dot{Q} - \dot{W}_{comp} + \dot{W}_{mech\ loss}} \quad (2.6)$$

La puissance des forces de frottement internes agit donc comme une source d'énergie interne : elle convertit de l'énergie mécanique macroscopique en énergie d'agitation moléculaire microscopique. On appelle parfois abusivement ce terme $\dot{W}_{mech\ loss}$ « perte d'énergie ». Il s'agit bien plus d'une *dissipation irréversible d'énergie mécanique* en énergie interne. Cela a à voir avec le second principe de la thermodynamique.

3 Application du bilan d'énergie totale à des composants d'un circuit fluide

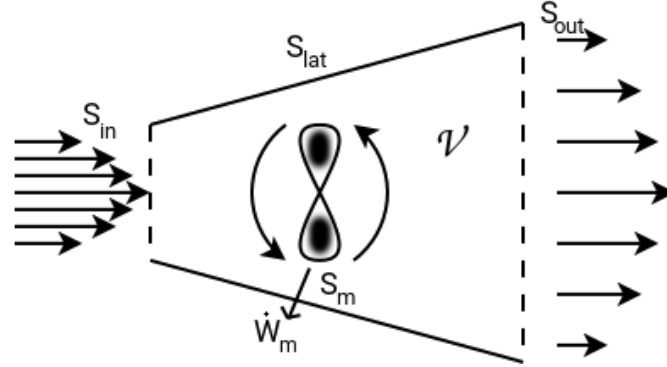


FIGURE 7 – Schéma générique d'une machine fluide échangeant du travail avec l'extérieur : volume de contrôle \mathcal{V} limité par une surface d'entrée S_{in} , une surface de sortie S_{out} , une surface solide fixe S_{lat} et une surface solide mobile S_m , munie d'un arbre permettant d'échanger avec l'extérieur la puissance \dot{W}_m

Considérons un volume de contrôle tel que représenté en Fig. 7. La surface du volume de contrôle est constituée par :

- des parois solides étanches et fixes S_{lat} (conduites, réservoirs),
- ou des parois solides étanches et mobiles S_m pouvant par exemple représenter les aubes d'une turbine ou les pales d'un ventilateur avec \vec{v}_s la vitesse de déplacement de la frontière,
- des sections fluides constituant les entrées et sorties du système S_{in} et S_{out} que l'on choisira de préférence droites et loin de toute perturbation (on pourra alors légitimer l'hypothèse de l'écoulement « quasi-uniforme »).

Les bilans que nous avons considérés étaient écrits pour un volume de contrôle fixe dont toutes les frontières étaient immobiles. On montre que le bilan en présence de frontières mobiles à l'intérieur d'un volume fixe s'écrit sous une forme plus commode :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} g dv + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} g (\vec{u} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} ds = \int_{\mathcal{V}} P_g dv + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \Phi_g \cdot \vec{n} ds$$

On peut alors décomposer les termes surfaciques sur chaque surface, en utilisant le fait que :

- Les surfaces d'entrée et de sortie sont supposées fixes : $\vec{v}_s = 0$ sur $S_{in} + S_{out}$;
- Les parois latérales sont fixes et imperméables : $(\vec{u} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{u} = 0$ sur S_{lat} ;
- Les parois de la machine sont imperméables : $(\vec{u} - \vec{v}_s) \cdot \vec{n} = 0$ sur S_m .

Le bilan se simplifie car seuls restent les termes de flux en entrée et en sortie :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} g dv + \int_{S_{in} + S_{out}} g \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_{\mathcal{V}} P_g dv + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \Phi_g \cdot \vec{n} ds}$$

3.1 Bilan de masse

Par définition, le débit massique \dot{m}_S à travers une surface *quelconque* orientée S du composant est :

$$\dot{m}_S = \int_S (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

Appliqué aux surfaces d'entrée et de sortie, ce terme est positif pour une sortie où la vitesse est principalement orientée dans le sens de la normale sortante et négatif pour une entrée où la vitesse est de direction principale opposée à la normale sortante. On préfère manipuler des quantités positives pour parler de débit massique. On distinguera donc les débits sur les sorties \dot{m}_{out} et les entrées \dot{m}_{in} :

$$\begin{aligned}\dot{m}_{in} &= - \int_{S_{in}} (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) \, ds \\ \dot{m}_{out} &= \int_{S_{out}} (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) \, ds\end{aligned}$$

Le bilan de masse (éq. 2.1) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv + \dot{m}_{out} - \dot{m}_{in} = 0$$

3.2 Puissance mécanique technique, puissance de transvasement et enthalpie

Nous allons nous concentrer sur les termes correspondant à la puissance des efforts externes non conservatifs \dot{W}_{nc} de l'équation 2.4.

$$\dot{W}_{nc} = \int_{S_{in}+S_{out}+S_{lat}+S_m} (-p\vec{n} + \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} \, ds$$

En présence de la surface mobile, le bilan d'énergie (éq. 2.4) s'écrira, en notant \mathcal{E} , E_k et E_p l'énergie interne, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle contenues dans le domaine \mathcal{V} :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E} + E_k + E_p) + \int_{S_{in}+S_{out}} \left(e + \frac{1}{2}u^2 + gz \right) (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) \, ds = \\ \int_{S_{in}+S_{out}} (-p\vec{n} + \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \vec{n}) \cdot \vec{u} \, ds + \underbrace{\int_{S_m} (-p\vec{n} + \bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v}_s \, ds}_{\dot{W}_m} + \dot{Q}\end{aligned}$$

On appelle puissance mécanique *technique* \dot{W}_m la puissance mécanique échangée avec l'extérieur ayant pour origine les forces exercées sur le fluide par des surfaces mobiles à l'intérieur du domaine. Le reste de la puissance échangée avec l'extérieur se fait sur les surfaces d'entrée et de sortie principalement par le travail des forces de pression, que l'on nomme *la puissance de transvasement*, les contraintes visqueuses normales y étant négligeables¹.

On définit une variable d'état particulièrement utile pour l'étude des systèmes ouverts, l'*enthalpie spécifique* h qui permettra d'inclure la puissance de transvasement dans le membre de gauche du bilan d'énergie :

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

L'équation de bilan d'énergie (éq. 2.4) s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E} + E_k + E_p) + \int_{S_{in}+S_{out}} \left(h + \frac{1}{2}u^2 + gz \right) (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) \, ds = \dot{W}_m + \dot{Q}} \quad (3.1)$$

1. On l'admet et c'est d'autant plus vrai pour un choix de surfaces d'entrée et sortie droites et loin de toute perturbation

3.3 Théorème de l'énergie cinétique, dissipation d'énergie mécanique et bilan d'énergie interne

Le bilan d'énergie mécanique, obtenu à partir du théorème de l'énergie cinétique s'écrira :

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_k + E_p) + \int_{S_{in}+S_{out}} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + gz \right) (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \dot{W}_m + \dot{W}_{comp} - \dot{W}_{mech\ loss} \quad (3.2)$$

En soustrayant cette équation au bilan d'énergie totale (éq. 3.1), on obtient un *bilan d'énergie interne* :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \int_{S_{in}+S_{out}} e (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \dot{Q} - \dot{W}_{comp} + \dot{W}_{mech\ loss} \quad (3.3)$$

3.4 Approximation d'écoulement quasi-uniforme en régime permanent : bilan enthalpique et relation de Bernoulli généralisée

Approximation de l'écoulement quasi-uniforme en régime permanent

- On se place ici en régime *permanent* (i.e. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$). En régime permanent le débit massique se conserve :

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m}$$

On utilisera alors les vitesses *débitantes* U_{out} et U_{in} telles que :

$$\begin{aligned} \dot{m}_{in} &= \rho_{in} S_{in} U_{in} \\ \dot{m}_{out} &= \rho_{out} S_{out} U_{out} \end{aligned}$$

- Approximation de l'écoulement quasi-uniforme : on suppose que les pressions, masses volumiques et températures sont homogènes sur les surfaces d'entrée et de sortie. Cette hypothèse est bien vérifiée en écoulements turbulents et en tuyauteries de diamètre usuel, pour des sections d'entrée et de sortie perpendiculaires à l'écoulement moyen et loin de toute perturbation. De même, on prendra pour les termes de pesanteur l'altitude moyenne des sections d'entrée et de sortie.

Dans tout ce qui suit, le symbole Δ correspond à la différence entre la valeur en sortie et celle en entrée. Le bilan d'énergie (éq. 3.1) s'écrit alors :

$$\dot{m} \Delta \left(h + \frac{\alpha}{2} U^2 + gz \right) = \dot{W}_m + \dot{Q}$$

Dans cette expression, la puissance mécanique technique \dot{W}_m et la puissance thermique \dot{Q} échangées avec le milieu extérieur sont des quantités algébriques, comptées positivement si elles sont fournies au système (pompe ou compresseur par exemple), et négativement si le système les transfère au milieu extérieur (turbine).

Le facteur de correction α pour l'énergie cinétique sera abordé en exercice. On montre que pour un tuyau de section circulaire, en écoulement laminaire développé (écoulement de Poiseuille) on a $\alpha = 2$; et en écoulement turbulent développé on a $\alpha \simeq 1.05$.

— Le bilan d'énergie mécanique (éq. 3.2) s'écrit :

$$\dot{m}\Delta\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\alpha}{2}U^2 + gz\right) = \dot{W}_m + \dot{W}_{comp} - \dot{W}_{mech\ loss} \quad (3.4)$$

— Le bilan d'énergie interne (éq. 3.3) s'écrit :

$$\dot{m}\Delta e = \dot{Q} - \dot{W}_{comp} + \dot{W}_{mech\ loss} \quad (3.5)$$

Interprétation

Bilan enthalpique

Ces relations sont valables en écoulement compressible ou incompressible, en fluide parfait ou visqueux. En pratique, l'utilisation du bilan d'énergie permet par exemple :

- de déterminer la puissance mécanique nécessaire pour réaliser une compression donnée ;
- de déterminer la puissance mécanique récupérée connaissant la variation d'enthalpie massique entre l'entrée et la sortie d'une turbine ;
- de déterminer la variation d'enthalpie d'un fluide soumis à un flux de chaleur connu, ...

Sous sa version stationnaire, le bilan d'énergie ne fait apparaître que l'enthalpie massique du fluide. On l'appelle parfois « bilan enthalpique ». La connaissance de lois d'état thermodynamique ou l'utilisation de tables ou de diagrammes thermodynamiques permet de relier notamment pression et enthalpie et fait l'objet de l'annexe III.A.

Variations de l'énergie interne et dissipation d'énergie mécanique en chaleur

En étudiant l'équation sur l'énergie interne (éq. 3.5), on s'aperçoit que le terme de dissipation d'énergie mécanique est un terme source positif, et va faire croître l'énergie interne, donc avoir tendance à élever la température du fluide.

Le terme \dot{W}_{comp} qui correspond à la puissance des forces de pression *internes* est :

- nul en écoulement incompressible (car $\text{div}\vec{u} = 0$) ;
- positif dans le cas d'une détente en écoulement compressible ;
- négatif dans le cas d'une compression en écoulement compressible.

Dans le cas d'une compression, il aura tendance à faire augmenter la température du fluide.

Relation de Bernoulli généralisée en écoulement incompressible

- En divisant l'équation 3.4 par le débit massique \dot{m} , on obtient une équation dont les termes sont homogènes à de l'énergie par unité de masse (J.kg^{-1}) :

$$\Delta\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\alpha}{2}U^2 + gz\right) - \int_{\mathcal{V}} \frac{p\text{div}\vec{u}}{\dot{m}} dv + e_{mech\ loss} = w_m$$

Le terme w_m est le *travail utile massique* ou *travail technique massique* ; il correspond à l'énergie échangée entre une unité de masse du fluide et les parties mobiles de la machine.

Le terme $e_{mech\ loss}$ est la dissipation d'énergie mécanique par unité de masse.

- Dans le cadre des fluides en écoulement incompressible ($\rho = \text{cte}$), on montre à partir du bilan de masse sous forme locale que :

$$\text{div}\vec{u} = 0$$

Le terme correspondant aux effets compressibles est alors nul *en écoulement incompressible* : $-\int_V \frac{p \operatorname{div} \vec{u}}{\dot{m}} dv = 0$.

- On utilisera la notion de « charge hydraulique », qui est une énergie par unité de poids (J.N^{-1}), en divisant les termes de cette équation par la pesanteur de référence $g_{ref} = 9.80665 \text{ m.s}^{-2}$. La charge hydraulique s'exprime plus communément en mètre de colonne de fluide². Il s'agit d'un héritage des premiers systèmes métriques prenant comme grandeur fondamentale le poids au lieu de la masse. Ceci est également un héritage des techniques de mesures de pression basées sur des manomètres à colonnes fluides (eau, mercure).

La *charge hydraulique* \mathcal{H}_l est par définition :

$$\mathcal{H}_l = \frac{p}{\rho g_{ref}} + \frac{\alpha}{2g_{ref}} U^2 + \frac{g}{g_{ref}} z$$

L'équation de bilan d'énergie mécanique, que l'on nomme également dans ce cas **relation de Bernoulli généralisée** s'écrit alors :

$$\Delta \left(\frac{p}{\rho g_{ref}} + \frac{\alpha}{2g_{ref}} U^2 + \frac{g}{g_{ref}} z \right) + \frac{1}{g_{ref}} e_{mech\ loss} = \frac{1}{g_{ref}} w_m$$

Pour une turbomachine, on définit la *hauteur manométrique totale* HMT comme étant la *différence de charge hydraulique* entre la sortie et l'entrée de la machine :

$$g_{ref} \text{HMT} = \left(\frac{p_{out}}{\rho} - \frac{p_{in}}{\rho} \right) + \left(\frac{\alpha_{out}}{2} U_{out}^2 - \frac{\alpha_{in}}{2} U_{in}^2 \right) + g(z_{out} - z_{in})$$

On a alors, $e_{mech\ loss}$ étant parfois appelé « pertes hydrauliques dans la machine » :

$$g_{ref} \text{HMT} = w_m - e_{mech\ loss}$$

Pour une pompe, où la grandeur « consommée » est le travail massique fourni à la roue et la grandeur « produite » est la hauteur manométrique totale, le rendement est :

$$\eta_{pump} = \frac{g_{ref} \text{HMT}}{w_m} = \frac{w_m - e_{mech\ loss}}{w_m}$$

$$\eta_{pump} = \frac{\dot{m} g_{ref} \text{HMT}}{\dot{W}_m}$$

Pour une turbine, c'est l'inverse³

$$\eta_{turbine} = \frac{w_m}{g_{ref} \text{HMT}} = \frac{w_m}{w_m - e_{mech\ loss}}$$

Enfin, dans le cas où il n'y a pas de machine, le terme de dissipation est présenté sous forme de « perte de charge » $\delta \mathcal{H}_l$:

$$\delta \mathcal{H}_l = \frac{e_{mech\ loss}}{g_{ref}}$$

2. Vérifier que $1 \text{ J.N}^{-1} = 1 \text{ m}$, et que $1 \text{ Pa} = 1 \text{ J.m}^{-3}$

3. Attention, dans l'expression fournie, pour une turbine, les quantités HMT et w_m sont négatives avec notre convention

Le lien entre forces de frictions en paroi et pertes de charge dans une canalisation, ainsi que diverses lois analytiques et corrélations empiriques de pertes de charge seront abordés aux § I.5.5 et I.5.6.

Et l'équation de Bernoulli généralisée, pour un circuit entre un point 1 et un point 2, comprenant éventuellement des pompes et des turbines pourra s'écrire :

$$\boxed{\mathcal{H}_l(1) + \text{HMT}_{\text{pompe}} = \mathcal{H}_l(2) + |\text{HMT}_{\text{turbine}}| + \delta\mathcal{H}_l} \quad (3.6)$$

Hypothèses usuelles pour différents composants

Pour simplifier la modélisation de la plupart des composants et machines rencontrés, on est amené à effectuer certaines hypothèses :

- **Pour les turbines, pompes, compresseurs,...** On suppose que l'évolution est adiabatique (*i.e.* $\dot{Q} = 0$). On omet également généralement le facteur de correction α , les écoulements étant généralement turbulents. On travaille alors avec l'enthalpie *totale* ou enthalpie d'arrêt $h_0 = h + \frac{U^2}{2}$. En négligeant la variation d'énergie potentielle de pesanteur entre l'entrée et la sortie⁴, on a alors la relation :

$$\boxed{\dot{m}\Delta h_0 = \dot{W}_m}$$

- **Pour les échangeurs, réacteurs, ...**

On n'a que de la chaleur échangée. On omet également généralement le facteur de correction α , les écoulements étant généralement turbulents. On travaille alors avec l'enthalpie *totale* ou enthalpie d'arrêt $h_0 = h + \frac{U^2}{2}$. En négligeant la variation d'énergie potentielle de pesanteur entre l'entrée et la sortie⁵, on a alors la relation :

$$\boxed{\dot{m}\Delta h_0 = \dot{Q}}$$

- **Pour les tuyaux, vannes de détente, jonctions, ...** Il n'y a pas de parties mobiles donc pas d'échange de travail mécanique avec l'extérieur. Lorsque de plus ces éléments sont bien calorifugés, il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur. On néglige de plus généralement la contribution de la gravité. On a alors une transformation qui conserve l'enthalpie totale :

$$\sum_{\text{sorties}} \dot{m}_{\text{out}}(h_{0,\text{out}}) = \sum_{\text{entrées}} \dot{m}_{\text{in}}(h_{0,\text{in}})$$

4. Penser à vérifier cette hypothèse lors de l'emploi de la relation fournie

5. Penser à vérifier cette hypothèse lors de l'emploi de la relation fournie

4 Utilisation du bilan intégral de quantité de mouvement

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'un grand nombre de composants d'un circuit fluide peuvent être modélisés avec une *approche énergétique* et un bilan d'énergie totale entre l'entrée et la sortie du composant (approche dite « 0D »). Du point de vue *thermodynamique* que l'on adoptera plutôt pour modéliser des composants dans un cycle avec *échanges de chaleur et travail avec le milieu extérieur*, cette approche permet par exemple de déterminer l'*enthalpie* en sortie connaissant celle en entrée, le débit et les travaux et chaleurs échangés avec l'extérieur. Si l'on veut connaître l'état thermodynamique du fluide complètement, il est toutefois nécessaire de déterminer un autre paramètre, en pratique **la pression**. Cette dernière correspondant aux forces de contact extérieures appliquées sur les surfaces d'entrée et de sortie du composant, on peut se dire qu'un **bilan de quantité de mouvement** donnera des informations sur l'évolution des pressions à travers le volume de contrôle.

D'un point de vue plus *mécanique*, dans le cas par exemple des fluides en écoulement incompressible dans un circuit fluide, on utilisera plutôt le bilan d'énergie mécanique (ou *relation de Bernoulli généralisée*) pour relier les *variations d'énergie mécanique* du fluide (sa charge hydraulique) aux *travaux échangés* dans des machines. Il est toutefois nécessaire dans l'utilisation de ce bilan de connaître la *puissance dissipée par les forces intérieures* au volume de contrôle (\simeq « perte de charge »). Or, tout l'intérêt de l'approche par bilans sur un volume de contrôle est justement de ne pas avoir à considérer ce qui se passe à l'intérieur et de n'avoir à traiter que des données extérieures. Rappelons-nous que le bilan d'énergie mécanique est obtenu à partir de la forme locale de l'équation bilan de quantité de mouvement, multipliée scalairement par le champ des vitesses locales, puis intégrée sur le volume (voir § I.2.7 et éq. 2.5) : le terme de « **perte de charge** » peut dans certains cas être évalué plus simplement par l'intermédiaire d'un **bilan de quantité de mouvement** qui ne fera intervenir que les résultantes des efforts extérieurs au système considéré.

Enfin, si l'on souhaite *déterminer les efforts* qu'exerce un écoulement *sur un obstacle ou sur les parois* d'un conduit, pour là aussi dimensionner par exemple les boulons d'une bride, un support de tuyauterie ou connaître le nombre de pompiers nécessaires pour tenir la lance à incendie, on fera appel à *une équation portant sur les forces* : le **bilan de quantité de mouvement**.

4.1 Bilan de quantité de mouvement dans l'approximation quasi-uniforme

Si on note $\vec{\mathcal{P}} = \int_V \rho \vec{u} dv$ la quantité de mouvement du volume de contrôle, le bilan de quantité de mouvement intégré sur le volume (éq. 2.2) peut s'écrire dans l'approximation quasi-uniforme (voir Fig. 8) :

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} - \rho_e U_e S_e \beta_e U_e \vec{N}_e + \rho_s U_s S_s \beta_s U_s \vec{N}_s = M \vec{g} + p_e S_e \vec{N}_e - p_s S_s \vec{N}_s + \vec{F}_{p \rightarrow f}$$

On a dans cette équation :

- Dans les termes de gauche la variation de quantité de mouvement et les flux de quantité de mouvement en entrée et sortie du domaine, avec un facteur de correction β :

$$\beta = \frac{1}{SU^2} \int_S u^2 ds$$

En tuyau de section circulaire, en écoulement laminaire développé (écoulement de Poiseuille) on a $\beta = 4/3$; et en écoulement turbulent développé on a $\beta \simeq 1.01$.

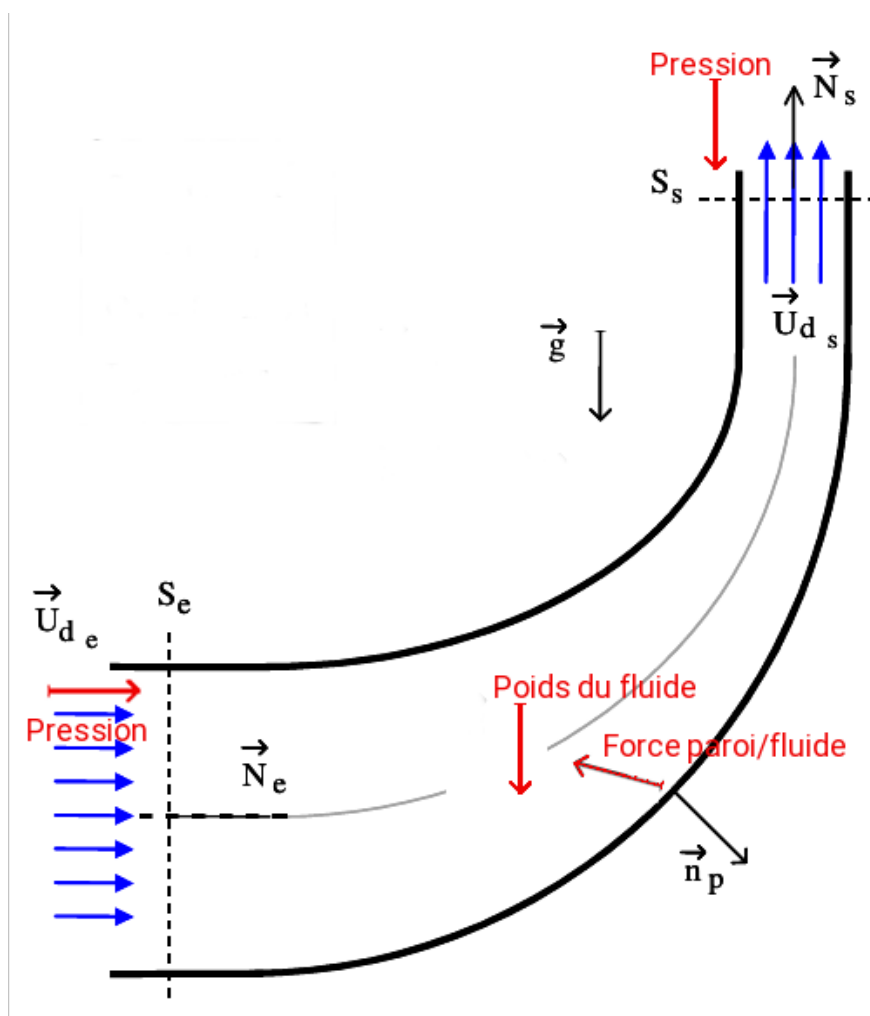


FIGURE 8 – Bilan intégré de quantité de mouvement. S_e est la surface d'entrée et \vec{N}_e est la normale entrante (dans le sens de l'écoulement). S_s est la surface de sortie et \vec{N}_s est la normale sortante (dans le sens de l'écoulement)

- Dans les termes du membre de droite, les forces extérieures :
 - Le poids du fluide contenu dans le volume de contrôle $M\vec{g}$;
 - La résultante des forces de pression en entrée $p_e S_e \vec{N}_e$;
 - La résultante des forces de pression en sortie $-p_s S_s \vec{N}_s$;
 - La résultante des forces exercées par la paroi sur le fluide $\vec{F}_{p \rightarrow f}$.

Remarque : on a négligé les forces normales d'origine visqueuses sur les surfaces d'entrée et de sortie.

En régime permanent :

$$\Delta \left\{ (\dot{m}\beta U + pS) \vec{N} \right\} = M\vec{g} + \vec{F}_{p \rightarrow f} \quad (4.1)$$

La résultante des forces exercées par la paroi sur le fluide a deux origines : une contribution normale à la paroi liée principalement à la pression et une contribution tangente à la paroi liée aux contraintes de cisaillement visqueuses.

5 Bilans 1D le long de l'axe de la conduite

Les bilans intégrés sur un volume de contrôle vus aux chapitres I.3 et I.4 *ne* donnent des informations *que* sur les travaux et chaleurs *totaux* échangés avec l'extérieur, sur les *résultantes* des efforts extérieurs et sur les variables thermodynamiques en *entrée* et *sortie* du volume considéré (**approche 0D**). Dans certaines situations, on peut souhaiter avoir des informations à un niveau plus local : par exemple pour l'écoulement en tube vertical chauffé par la paroi, illustré en Fig. 24 de l'annexe III.B, où l'on voit que le régime d'écoulement évolue continuellement le long de la conduite. Dans ce cas, une information intégrée sur la section de conduite *en chaque point le long de l'axe* pourra être obtenue par une **approche 1D** dont le principe est le suivant :

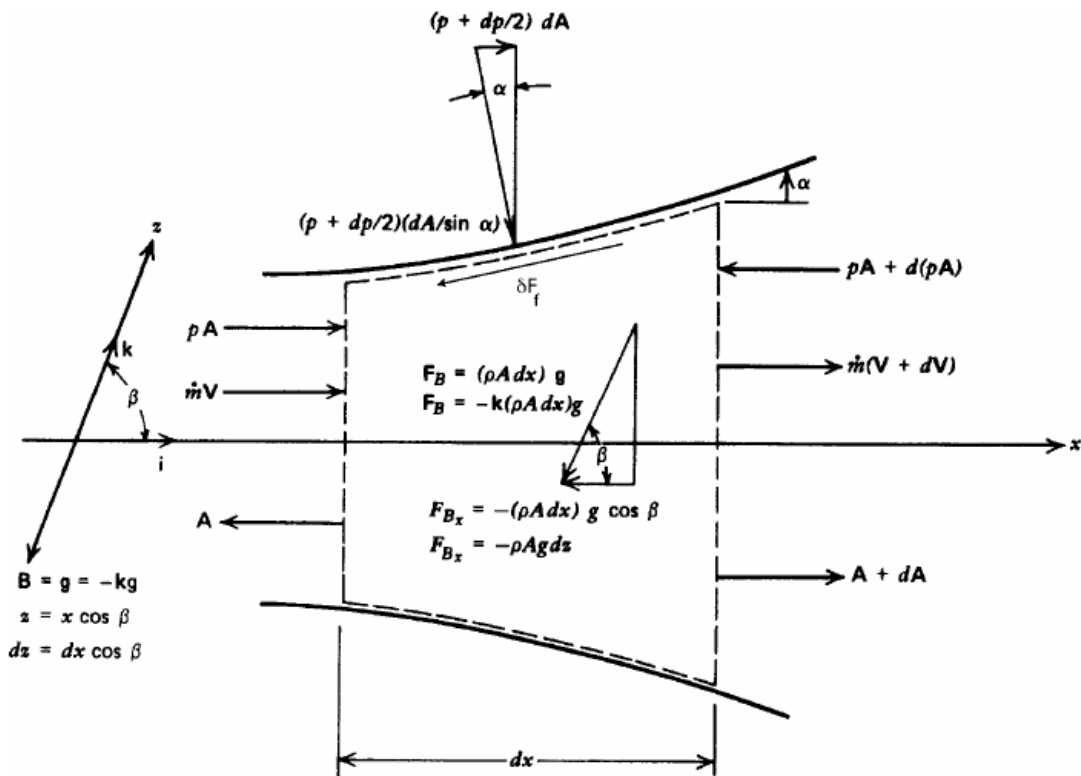


FIGURE 9 – Tronçon de conduite élémentaire

Le long de l'axe de la conduite (axe x par exemple), on la discrétise en une succession de petits volumes élémentaires de longueur dx (voir Fig. 9). On effectue pour chaque tronçon des bilans sur ce volume de contrôle fixe non matériel de longueur. On reprendra donc les équations 2.1, 2.2 et 2.4.

On appliquera de plus l'hypothèse d'écoulement uniforme : *pression, température, masse volumique et vitesse*¹ *homogènes sur les surfaces d'entrée et de sortie.* Ces quantités ne dépendent donc que de x .

Puis on fera tendre dx vers 0 et on ne gardera que les termes de premier ordre en dx . Les résultats obtenus ci-après ne seront valides que pour des **conduites de section lentement variables, sans singularité** (ainsi, dans le cas de l'élargissement brusque traité en exercice II.2.1 p. 35 cette approche n'est pas valide : la vitesse moyenne sur la section n'est pas continue au

1. On peut relâcher cette dernière contrainte et introduire les coefficients de correction pour l'énergie cinétique et la quantité de mouvement α et β vus aux chapitres I.3 et I.4

niveau de l'élargissement).

Le tronçon de longueur dx délimite un volume \mathcal{V} , avec une surface latérale S_{lat} solide, et deux surfaces traversées par le fluide : l'entrée d'aire $S(x)$, la sortie d'aire $S(x+dx)$. On a alors pour toute fonction régulière $f(x)$:

$$\int_{\mathcal{V}} f(x') dv = f(x)S(x)dx + o(dx^2)$$

En particulier, au premier ordre, $\mathcal{V} \simeq S(x)dx$.

On rappelle également le théorème de flux-divergence, appelé aussi théorème de Green-Ostrogradski :

$$\int_{S(x)+S_{lat}+S(x+dx)} \vec{f} \cdot \vec{n} ds = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{f}) dv$$

En particulier, le vecteur \vec{e}_x étant de divergence nulle :

$$\begin{aligned} \int_{S(x)+S_{lat}+S(x+dx)} \vec{e}_x \cdot \vec{n} ds &= 0 \\ \int_{S_{lat}} \vec{e}_x \cdot \vec{n} ds &= -(S(x+dx) - S(x)) \end{aligned} \quad (5.1)$$

5.1 Bilan de masse

En l'absence de source ou de puits de matière dans le volume géométrique fixe, la conservation de la masse (éq. 2.1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) &= \rho(x)S(x)U(x) - \rho(x+dx)S(x+dx)U(x+dx) \\ S dx \frac{\partial}{\partial t}(\rho) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho S U) dx \\ S \frac{\partial}{\partial t}(\rho) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\rho S U) \end{aligned}$$

5.2 Bilan de quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique, c'est-à-dire le bilan de quantité de mouvement (éq. 2.2), en projection sur l'axe de la conduite, s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} V \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) &= [\rho U S U](x) - [\rho U S U](x+dx) \\ &+ \int_V \vec{g} \cdot \vec{e}_x dv - \int_{S(x)+S_{lat}+S(x+dx)} (p\vec{n}) \cdot \vec{e}_x ds \\ &+ \int_{S_{lat}} \bar{\sigma}_v \cdot \vec{n} \cdot \vec{e}_x ds \end{aligned}$$

Dans l'équation précédente, on identifie les différents termes (variation purement temporelle dans le volume, flux de quantité de mouvement entrant, flux de quantité de mouvement sortant,

force de pesanteur et forces de surfaces). On a négligé ici la variation des contraintes de cisaillement sur les surfaces d'entrée et de sortie pour ne conserver que la contrainte d'origine visqueuse sur la paroi latérale, contrainte de cisaillement pariétale que l'on notera τ_w . Sur la paroi latérale, $ds = \mathcal{P}dx$, avec \mathcal{P} le périmètre mouillé. On montre alors, en utilisant l'équation 5.1 pour traiter le problème de la contribution des forces de pression sur la paroi latérale et en ne gardant que les termes du premier ordre en dx :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x}(\rho S U^2) = \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x - \frac{\partial}{\partial x}(p) - \frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w$$

5.3 Bilan d'énergie

On se place dans un cas où aucun travail n'est échangé avec l'extérieur, et où la seule source de chaleur est une densité surfacique de flux de chaleur sur la paroi solide φ . La conservation de l'énergie totale (somme de l'énergie cinétique et interne) s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{1}{2} U^2 \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \left(\frac{1}{2} U^2 + h + gz \right) U \right) = \frac{\mathcal{P}}{S} \varphi$$

5.4 En régime permanent

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\rho S U) &= 0 & (5.2) \\ \frac{dp}{dx} &= \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x - \rho U \frac{d}{dx}(U) - \frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w & (5.3) \\ \frac{d}{dx} \left(\rho \left(\frac{1}{2} U^2 + h + gz \right) U \right) &= \frac{\mathcal{P}}{S} \varphi & (5.4) \end{aligned}}$$

On remarque que le gradient de pression se compose de trois termes :

- un terme hydrostatique ;
- un terme d'accélération. Ce terme n'existe qu'en cas de variation le long de la conduite de la masse volumique, *i.e.* uniquement en cas de fluide en écoulement compressible, de variation de température importante ou de changement de phase ;
- un terme de friction à modéliser.

5.5 Modélisation du terme de friction

Le terme de friction dans le bilan de quantité de mouvement (éq. 5.3) s'écrit :

$$\frac{dp}{dx}_{friction} = -\frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w$$

On introduit le *diamètre hydraulique* $D_h = 4S/\mathcal{P}$ qui correspond au diamètre pour une conduite de section circulaire.

L'analyse dimensionnelle conduit à exprimer la contrainte de cisaillement en paroi τ_w en fonction de la masse volumique ρ et de la vitesse débitante U , par l'intermédiaire d'un *coefficient de friction* C_f qui ne dépend que du nombre de Reynolds Re . Le nombre de Reynolds est usuellement défini avec le diamètre hydraulique et la vitesse débitante (μ est la viscosité dynamique) :

$$Re = \frac{\rho U D_h}{\mu}$$

Le lien entre contrainte de cisaillement en paroi, coefficient de friction, masse volumique et vitesse débitante est :

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \rho U^2$$

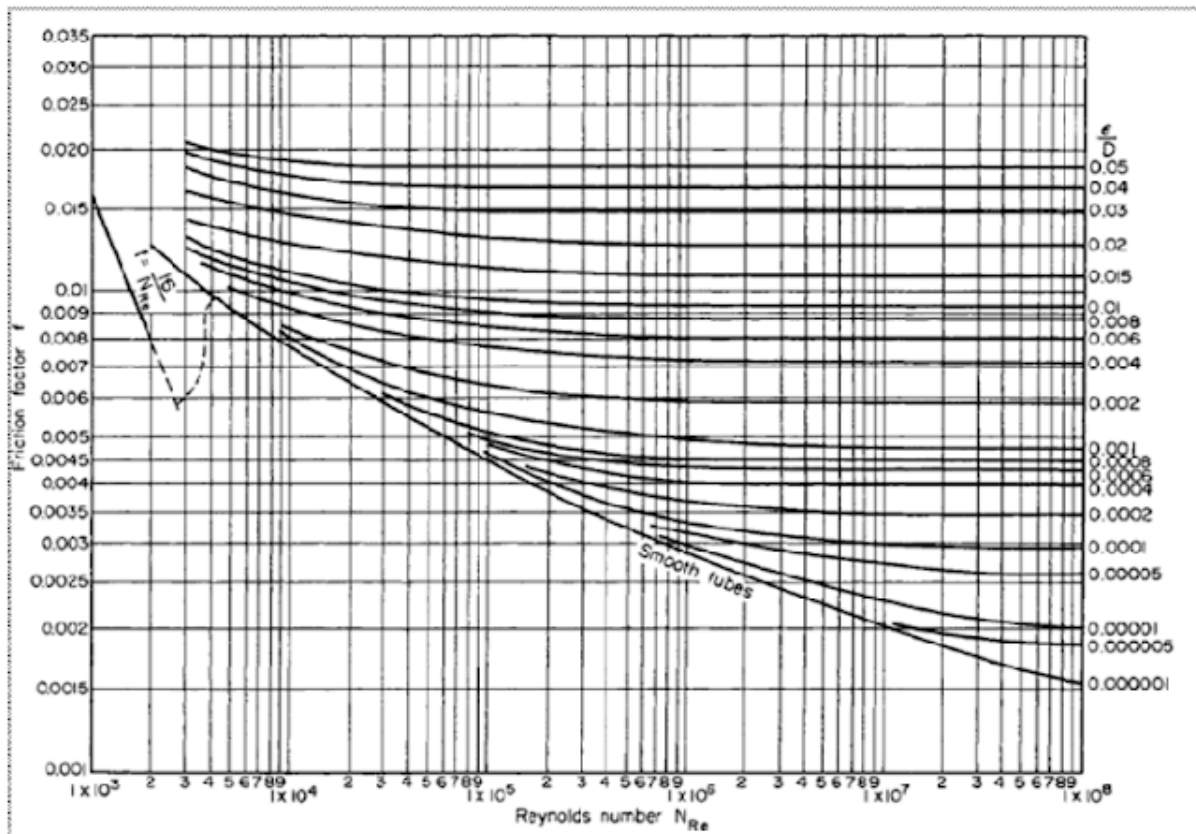


FIGURE 10 – Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds pour un écoulement en tuyau de section constante

Le terme de friction dans le bilan de quantité de mouvement s'écrira donc :

$$\frac{dp}{dx_{friction}} = -\frac{4C_f}{D_h} \frac{1}{2} \rho U^2$$

Un exemple d'abaque pour ce coefficient de friction² est présenté en Fig. 10. En conduite de section circulaire, on montre en écoulement laminaire développé la loi dite de Hagen-Poiseuille :

$$C_f = 16Re^{-1}$$

Pour une conduite lisse en écoulement turbulent, on utilisera plutôt la corrélation de Blasius :

$$C_f = 0.079Re_h^{-0.25}$$

Pour un écoulement turbulent en conduite rugueuse de rugosité relative ϵ/D , on utilisera la corrélation de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}} = -4 \log_{10} \left(\frac{1.26}{Re \sqrt{C_f}} + \frac{\epsilon}{3.7D} \right)$$

2. Attention, on péfère parfois employer un coefficient de « perte de charge » $\lambda = 4C_f$

5.6 Lien entre friction pariétale et perte de charge

Dans la relation de Bernoulli généralisée (éq. 3.6), en régime permanent dans une conduite de section lentement variable, de longueur $L = x_2 - x_1$, pour un fluide de densité constante, le terme de pertes de charge *régulières* s'écrit simplement :

$$\begin{aligned} g_{ref} \delta \mathcal{H}_l &= g_{ref} (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) \\ &= -\Delta_{1 \rightarrow 2} \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{U^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Le bilan de quantité de mouvement 1D (éq. 5.3) s'écrit quant-à-lui :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} - \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x + \rho U \frac{d}{dx} (U) &= -\frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w \\ d \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \vec{g} \cdot \vec{e}_x dx &= -\frac{\mathcal{P}}{S} \frac{\tau_w}{\rho} dx \\ &= -4C_f \frac{1}{D_h} \frac{U^2}{2} dx \end{aligned}$$

En l'intégrant entre x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned} -\Delta_{1 \rightarrow 2} \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{U^2}{2} \right) &= \int_{x_1}^{x_2} 4C_f(x) \frac{1}{D_h} \frac{U^2}{2} dx \\ g_{ref} \delta \mathcal{H}_l &= \int_{x_1}^{x_2} 4C_f(x) \frac{1}{D_h} \frac{U^2}{2} dx \end{aligned}$$

En conduite de section constante, avec un coefficient de friction C_f constant :

$$g_{ref} \delta \mathcal{H}_l = 4C_f \frac{L}{D_h} \frac{U^2}{2}$$

Deuxième partie

Exercices

1 Exercices sur le bilan d'énergie

1.1 Facteur de correction pour l'énergie cinétique

Dans l'approximation de l'écoulement uniforme, on introduit une vitesse *débitante* au niveau des entrées ou sorties U telle que :

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \left| \int_S (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds \right| \\ \dot{m} &= \rho S U\end{aligned}$$

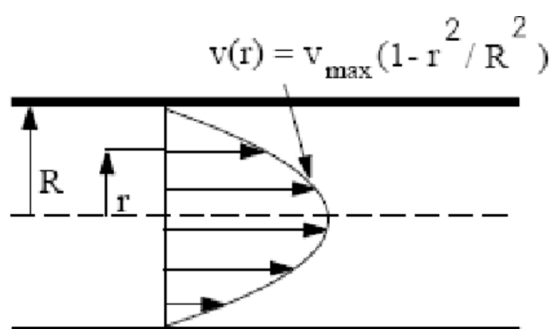


FIGURE 11 – Profil de vitesse en écoulement laminaire développé dans un tube de section circulaire

Pour l'écoulement dans un tube, l'énergie cinétique par unité de masse moyenne sur une section n'est pas $U^2/2$, car le carré d'une somme n'est pas égal à la somme des carrés. C'est pourquoi on introduit un facteur de correction α tel que :

$$\int_S \left(\frac{1}{2} u^2 \right) (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \dot{m} \alpha \frac{U^2}{2}$$

Montrer que pour un écoulement incompressible laminaire développé dans un tube de section circulaire (voir Fig. 11) $\alpha = 2$.

1.2 Calcul du débit dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire

Connaissant la puissance thermique dégagée dans le cœur du réacteur d'une centrale à eau sous pression du palier 900 MWe, $Q = 2785$ MW, et les températures froides $T_f = 284^\circ\text{C}$ et chaudes $T_c = 322^\circ\text{C}$ en entrée et sortie du réacteur, calculer le débit massique dans la totalité du circuit primaire.

D'après le NIST, à 155 bars et 284°C , $c_p = 5.139$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹ et $h = 1253.3$ kJ.kg⁻¹ et à 155 bars et 322°C , $c_p = 6.240$ kJ.kg⁻¹.K⁻¹ et $h = 1465.4$ kJ.kg⁻¹.

1.3 Rendement d'un ventilateur

Un ventilateur est alimenté avec une puissance de 50 W (voir Fig. 12). En amont, l'air est à une vitesse nulle et à une pression de 1 bar. En aval, l'air est à une vitesse de 12.1 m.s⁻¹ et à la pression de 1 bar. Le débit d'air véhiculé est de 0.506 kg.s⁻¹. Calculer le rendement du ventilateur.

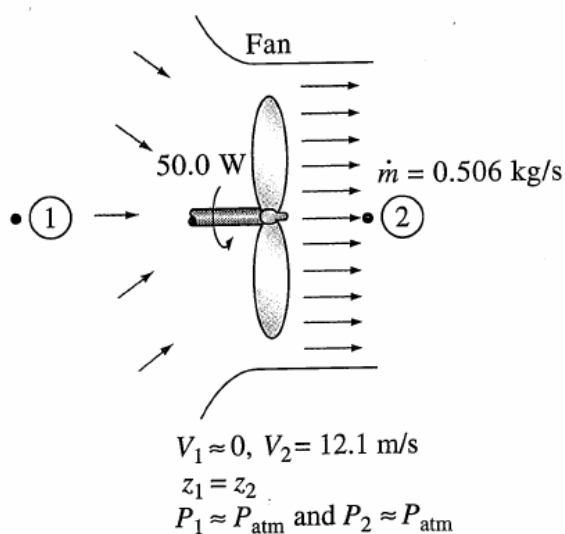


FIGURE 12 – Volume de contrôle autour du ventilateur

1.4 Echauffement de l'eau dans une pompe

Une pompe est alimentée avec un moteur électrique de 15 kW dont le rendement est de 90%. Elle véhicule un débit d'eau ($\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) de $50 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$ et élève sa pression de 100 kPa à 300 kPa (voir Fig. 13). Calculer le rendement hydraulique de la pompe et l'élévation de température de l'eau (prendre $c_v = 4.18 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$).

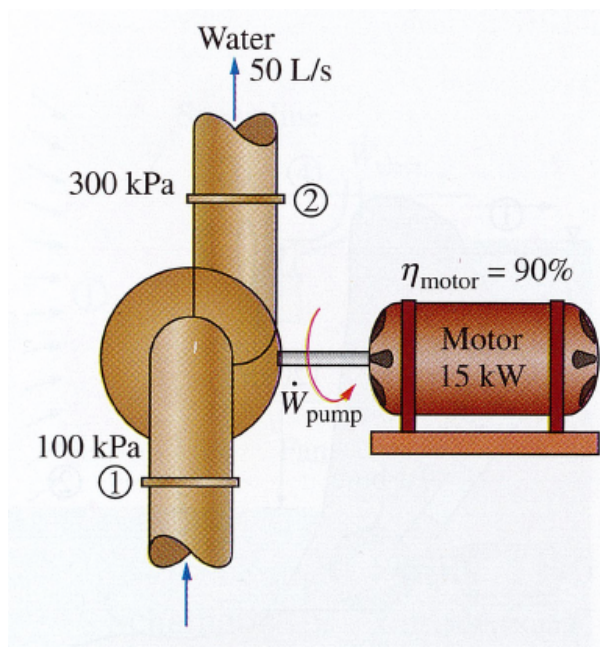


FIGURE 13 – Données pour le fonctionnement de la pompe

1.5 Puissance générée par une turbine hydraulique dans un barrage

Dans un barrage hydroélectrique, un débit de $100 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ s'écoule à travers une turbine. L'élévation entre le point 1 et le point 2 est de 120 m (voir Fig. 14). Les pertes de charge

hydraulique régulières dans la conduite (en excluant les pertes hydrauliques au niveau de la turbine) sont de 35 m de colonne d'eau. En supposant un rendement global pour la turbine et la génératrice électrique de 80%, donner la puissance électrique fournie. De combien augmente la production pour chaque point de rendement gagné?

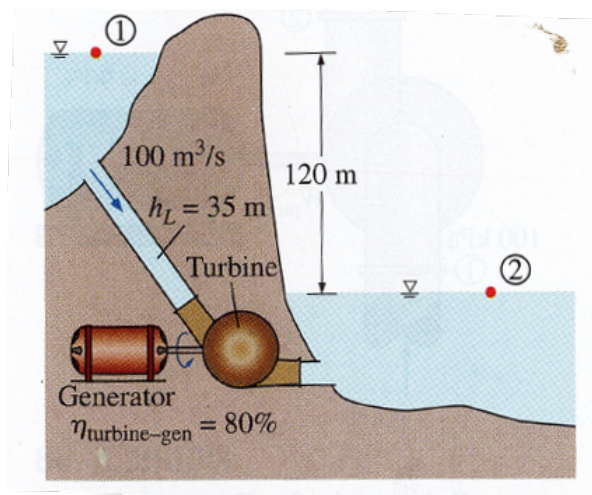


FIGURE 14 – Schéma pour l'exercice du barrage

2 Exercice sur le bilan intégral de quantité de mouvement

2.1 Perte de charge dans un élargissement brusque

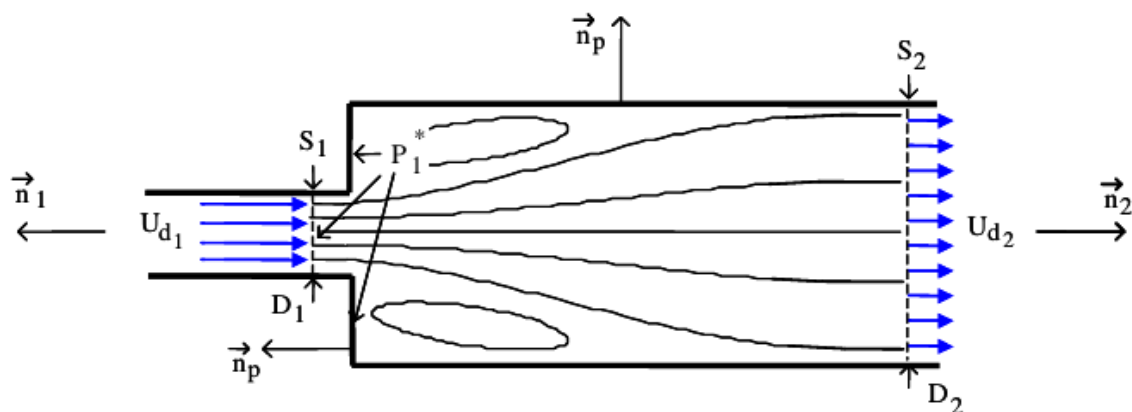


FIGURE 15 – Schéma de l'élargissement brusque

Considérons deux conduites cylindriques de diamètres D_1 et D_2 raccordées sur le même axe et telles que $D_2 > D_1$. L'expérience montre que l'écoulement se sépare sur le raccordement. Dans la région décollée, on observe la formation d'une zone de recirculation avec des tourbillons (voir Fig. 15). A une distance d'environ 20 fois le diamètre D_2 , la perturbation est oubliée et l'écoulement est à nouveau établi (le profil de vitesse n'évolue plus).

On va montrer ici que, même en négligeant les frottements sur les parois, cette singularité

induit une dissipation d'énergie mécanique (qui trouve son origine dans l'écoulement tourbillonnaire), que l'on exprimera sous forme de « perte de charge hydraulique ».

Pour calculer la perte de charge dans cette singularité, et le coefficient associé, nous allons écrire les bilans intégraux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique entre une section en amont et une section en aval dans lesquelles l'écoulement est établi (pas d'évolution longitudinale des profils de vitesse, filets fluides rectilignes et parallèles, écoulement unidimensionnel). On se place en écoulement incompressible de masse volumique ρ . On négligera les forces de friction visqueuses sur les parois solides. De même, on ne tiendra pas compte des termes de gravité.

On constate expérimentalement que la pression sur la paroi solide correspondant au raccord des deux tubes est très proche de la pression dans la section S_1 (voir Fig. 15). On écrira donc (en utilisant la notation de la figure) $P_1^* = P_1$.

1. Ecrire le bilan de masse dans le volume de contrôle limité par les surfaces d'entrée S_1 , de sortie S_2 et les surfaces solides des tubes compris entre l'entrée et la sortie.
2. Ecrire le bilan de quantité de mouvement projetée dans la direction axiale dans ce même volume de contrôle.
3. Ecrire le bilan d'énergie mécanique dans ce même volume de contrôle en faisant intervenir l'énergie massique dissipée par les efforts internes sous forme d'un terme inconnu $e_{mech\,loss}$.
4. L'exprimer en fonction de S_1 , S_2 et U_{d1} .
5. Proposer un coefficient de perte de charge singulière et donner son expression en fonction de S_1 et S_2 .

3 Exercice sur les bilans 1D

3.1 Calcul de la caractéristique interne d'un canal chauffé

On s'intéresse à l'écoulement en régime permanent d'un liquide dans une canalisation verticale chauffée uniformément le long de la paroi (voir Fig. 16). On prendra pour les applications numériques le cas traité expérimentalement par Matzner *et al.* :

- Pression du système 68.9 bars ;
- Conduite lisse de diamètre $D = 10.16$ mm ;
- Longueur du système $L = 3.66$ m ;
- Puissance de chauffe totale, répartie uniformément sur la surface latérale de la conduite : $\mathcal{P} = 100$ kW.

Pour un écoulement permanent dans une conduite de section constante, on appelle caractéristique interne la courbe représentant la relation entre la perte de pression et le débit massique (ou la vitesse massique), pour des conditions d'entrée données. La connaissance du réseau de caractéristiques internes permet de déterminer la différence de pression à imposer aux bornes de la conduite pour obtenir le débit souhaité et donc de prévoir la pompe qu'il faut utiliser.

Détermination des débits limitants trois zones

Quelques données thermodynamiques utiles sont tracées en Fig. 17. On suppose que le fluide entre dans la conduite aux conditions de liquide sous-saturé suivantes :

- Masse volumique $\rho_{in} = 864$ kg.m⁻³ ;
- Enthalpie massique $h_{in} = 0.872$ MJ.kg⁻¹ ;

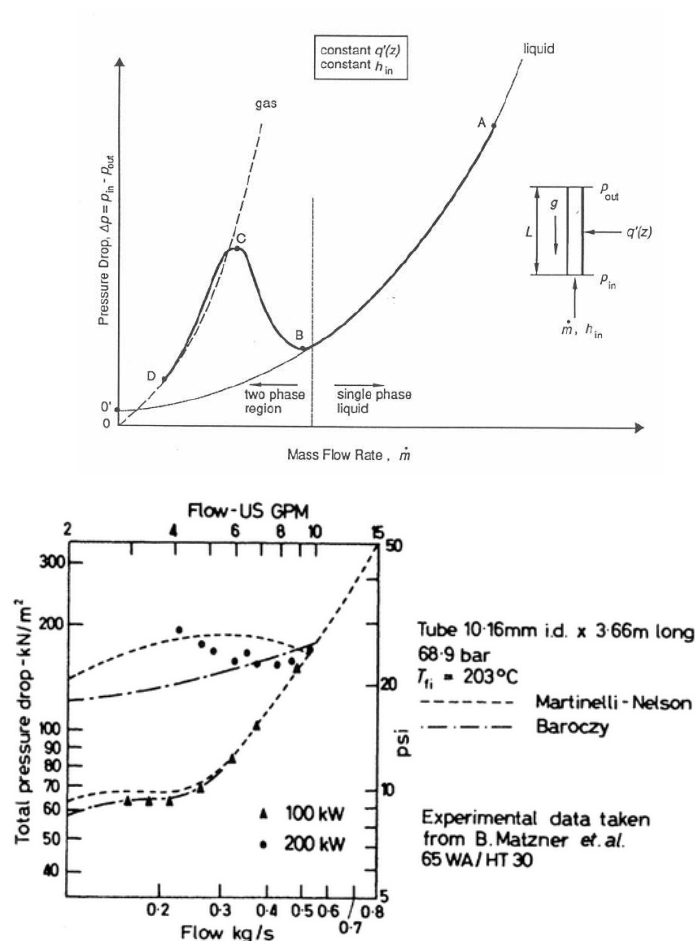


FIGURE 16 – Caractéristique interne d'un canal chauffant. Courbe générique (en haut), et résultats expérimentaux (en bas)

— Viscosité dynamique $\mu_{in} = 13.3 \times 10^{-5}$ Pa.s.

Les conditions au changement de phase à 68.9 bars sont :

- Masse volumique du liquide saturé $\rho_l = 742 \text{ kg.m}^{-3}$;
- Enthalpie massique du liquide saturé $h_l = 1.262 \text{ MJ.kg}^{-1}$;
- Viscosité dynamique du liquide saturé $\mu_l = 9.17 \times 10^{-5}$ Pa.s.
- Masse volumique de la vapeur saturée $\rho_v = 36 \text{ kg.m}^{-3}$;
- Enthalpie massique de la vapeur saturée $h_v = 2.774 \text{ MJ.kg}^{-1}$;
- Viscosité dynamique de la vapeur saturée $\mu_v = 1.89 \times 10^{-5}$ Pa.s.

On cherche à montrer qu'il existe deux débits limites \dot{m}_1 et \dot{m}_2 tels que :

- Pour $\dot{m} > \dot{m}_2$ l'écoulement en sortie est monophasique liquide ;
- Pour $\dot{m}_1 < \dot{m} < \dot{m}_2$ l'écoulement en sortie est diphasique liquide/vapeur ;
- Pour $\dot{m} < \dot{m}_1$ l'écoulement en sortie est monophasique vapeur.

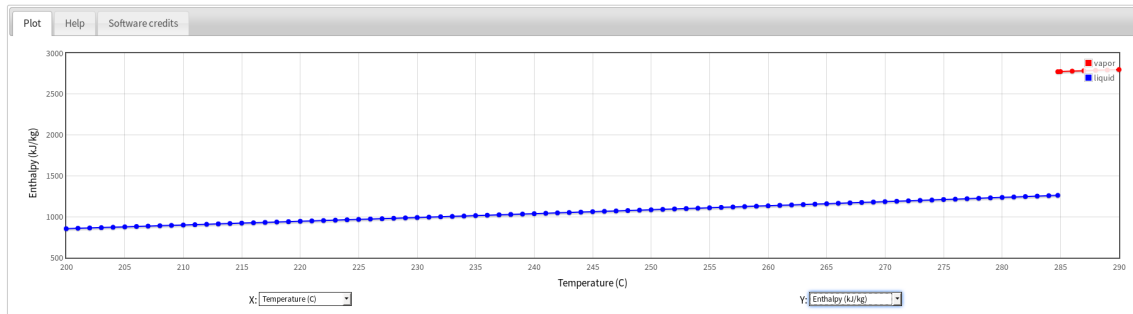
1. Ecrire le bilan d'énergie totale.
2. Montrer par un calcul d'ordre de grandeur qu'on peut négliger les variations d'énergie cinétique massique et d'énergie potentielle de pesanteur devant les variations d'enthalpie.

3. Calculer \dot{m}_1 et \dot{m}_2 . On néglige les variations de pression et on prendra donc dans ce calcul les données établies à 68.9 bars.

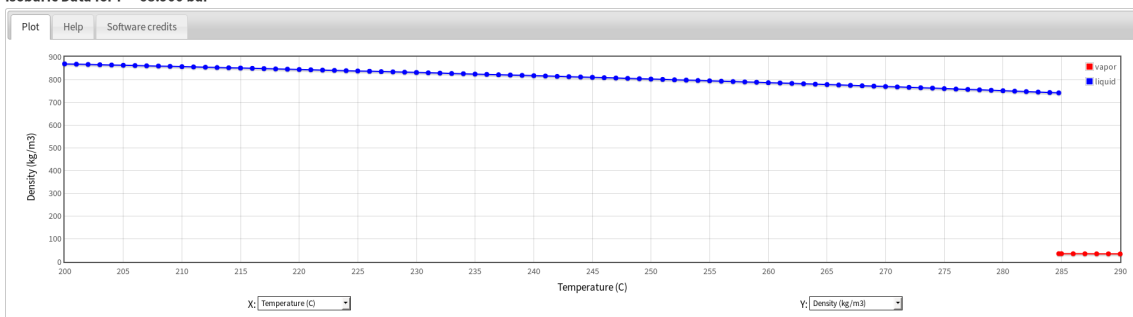
Variations de pression le long de la conduite

1. Modéliser la caractéristique interne pour $\dot{m} > \dot{m}_2$ (sortie en liquide).
2. Effectuer un calcul de la différence de pression à $\dot{m} = \dot{m}_2$.
3. Calculer l'altitude du changement de phase pour $\dot{m} = 0.2 \text{ kg.s}^{-1}$, et le titre thermodynamique en sortie, en supposant l'équilibre thermodynamique entre les phases.
4. Modéliser la caractéristique interne pour $\dot{m}_1 < \dot{m} < \dot{m}_2$, en utilisant le modèle homogène à l'équilibre dans la partie diphasique.
5. Effectuer un calcul de la différence de pression à $\dot{m} = 0.2 \text{ kg.s}^{-1}$.

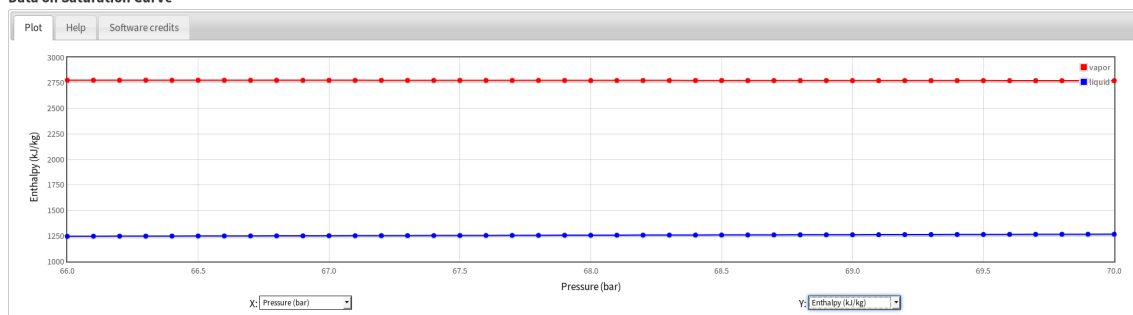
Isobaric Data for P = 68.900 bar



Isobaric Data for P = 68.900 bar



Data on Saturation Curve



Data on Saturation Curve

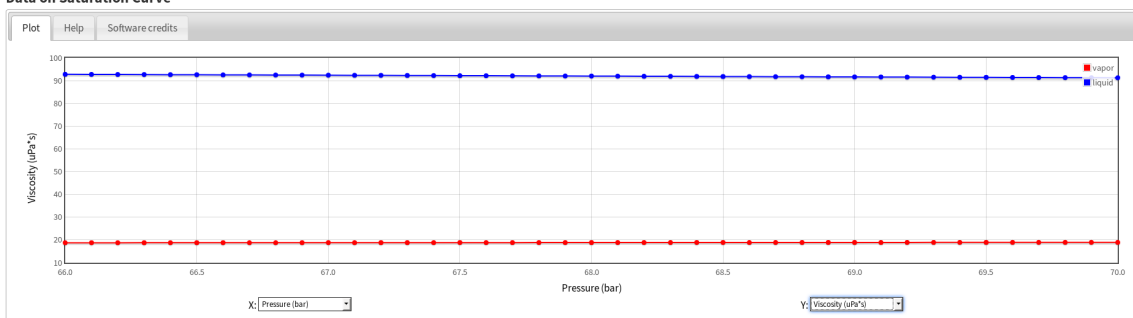


FIGURE 17 – Enthalpie massique et masse volumique fonction de la température à 68.9 bars, et enthalpies massiques et viscosités du liquide et de la vapeur à saturation pour une plage de pression de 60 à 70 bars (données NIST)

3.2 Dégazage du lac de Nyos

Introduction

Le lac de Nyos, situé au Cameroun, est alimenté en gaz carbonique par des sources profondes d'origine volcanique. Les émanations gazeuses s'accumulent en permanence au fond du lac, contrairement aux lacs de cratère des zones tempérées qui connaissent un brassage de leurs eaux du fait de l'alternance des saisons : en hiver, les eaux lourdes de la surface s'enfoncent du fait de leur poids pour remplacer les eaux de profondeur qui remontent, permettant ainsi des dégazages constants. Mais, les lacs des zones tropicales ne connaissent guère de brassage. De ce fait, les émanations gazeuses vont s'y accumuler en quantités très importantes. En 1986, à la suite d'un glissement de terrain, les eaux profondes saturées en gaz carbonique sont remontées à la surface et ont libéré environ un million de mètres cube de CO_2 provoquant la mort par asphyxie de plus de 1700 personnes résidant aux alentours du lac.

Depuis janvier 2001, une opération de dégazage du CO_2 piégé au fond du lac est en cours. L'opération, dénommée « Les orgues de Nyos », utilise un tuyau vertical en polyéthylène reliant les eaux profondes du lac saturées en CO_2 à la surface (voir Fig. 18).

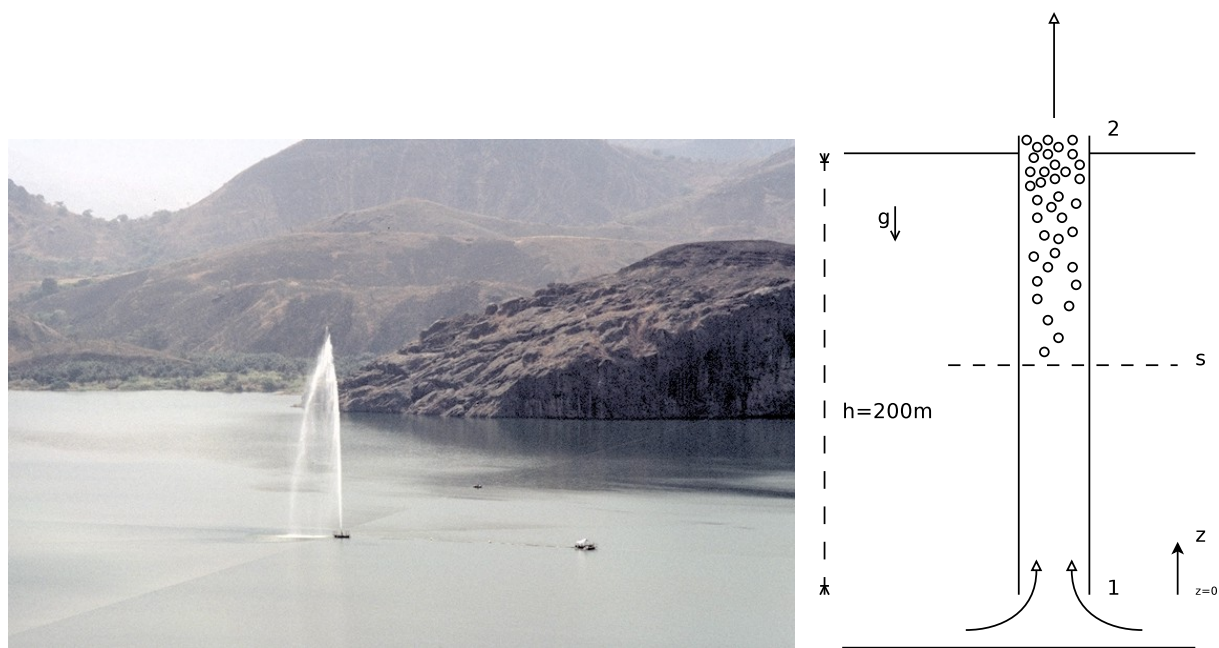


FIGURE 18 – *Orgues de Nyos. Schéma de principe. On indice par 1 les quantités en entrée de conduite, par s les quantités au niveau de la transition entre écoulement monophasique et écoulement diphasique, et par 2 les quantités en sortie.*

Le pompage est réalisé par autosiphon : pour l'amorçage, une pompe mécanique aspire l'eau en tête de colonne. Le liquide prélevé dans les eaux profondes du lac (riche en gaz dissous) s'élève dans la colonne. La pression diminue et atteint la limite de saturation. Des bulles commencent alors à se former et s'élèvent naturellement dans la colonne. De nouvelles bulles apparaissent qui entraînent le liquide. Une fois le processus amorcé, l'action de la pompe est inutile et celle-ci peut être arrêtée. Un jet d'eau et de dioxyde de carbone jaillit à l'orifice de la colonne et le dioxyde de carbone se dissipe en quantité inoffensive dans l'atmosphère.

On va ici établir un modèle permettant d'évaluer le débit pompé en régime permanent. Les hypothèses sont les suivantes :

- Lac de profondeur $h = 200$ m ;
- Température de l'eau constante (20°C) ;
- Masse volumique du liquide constante $\rho_l = 1000$ kg.m⁻³ ;
- Conduite cylindrique de diamètre $D = 140$ mm ;
- Fraction massique de CO₂ dissous au fond¹ $y_1 = 14 \times 10^{-3}$;
- Pression atmosphérique de 1 bar ;
- Equilibre thermodynamique local ;
- Masse volumique du gaz carbonique (gaz parfait) à 1 bar et 20°C : $\rho_g = 1.8$ kg.m⁻³ ;
- Masse molaire de l'eau (H₂O) : 18 g.mol⁻¹ ;
- Masse molaire du dioxyde de carbone (CO₂) : 44 g.mol⁻¹ ;

Gaz carbonique en solution : loi de Henry et approximation de la loi

La solubilité du gaz carbonique dans l'eau est décrite par la loi de Henry : « à température constante et à saturation, la fraction molaire de gaz dissous dans un liquide est proportionnelle à la pression partielle qu'exerce ce gaz sur le liquide ». Si c_s est la fraction molaire de gaz dissous et P_s sa pression partielle, on a à l'équilibre :

$$P_s = H c_s$$

avec H la constante de Henry.

Pour un gaz dissous dans un liquide, et dont la fraction molaire est c_s :

- si la pression du liquide est supérieure à P_s , le gaz reste dissous (liquide sous-saturé) ;
- si la pression du liquide est égale à P_s , on a un état saturé en gaz ;
- si la pression du liquide diminue, le dégazage commence et va tendre à ramener la fraction molaire du gaz dissous à une valeur correspondant à un état saturé.

Dans la suite, on considérera que seul du CO₂ est dissous dans le liquide, et qu'en cas de dégazage, la fraction de gaz dissous s'adapte instantanément au nouvel état d'équilibre.

Question 1

Sachant que pour le CO₂ dans de l'eau, la constante de Henry à 20°C vaut $H = 1430$ bars, calculer la masse de CO₂ maximum que l'on peut dissoudre dans 1 kg d'eau à 20 bars : le liquide au fond du lac est-il saturé ? Calculer la pression de saturation pour y_1 .

Partie de la conduite fonctionnant en écoulement monophasique

On prend un axe z orienté vers le haut, dont l'origine est à la base de la conduite (*i.e.* $z_1 = 0$ et $z_2 = h$). On appelle G le débit massique surfacique et U_l la vitesse moyenne du liquide *dans la partie monophasique*. On appelle C_f le coefficient de frottement pariétal.

Question 2

Le tube a une rugosité de l'ordre de $k = 80$ μm. En supposant que le nombre de Reynolds de l'écoulement correspondra à un régime turbulent hydrauliquement rugueux, estimer le coefficient C_f à partir de la corrélation (formulaire technique Gieck, table Z8) :

$$(4C_f)^{-1/2} = 1.14 - 2.0 \log_{10}(k/D)$$

1. Valeur moyenne, voir Kusakabe *et al.*; Schmid *et al.* (2003).

Question 3

En écrivant le bilan de quantité de mouvement et en intégrant le gradient de pression le long de la conduite, déterminer en fonction de U_l la position z_s à laquelle débute le dégazage. Donner une valeur estimée $z_{s,0}(U_l = 0)$.

Partie de la conduite fonctionnant en écoulement diphasique

L'écoulement comporte deux espèces chimiques différentes et deux phases, ce qui complique un peu le bilan de masse. On note y la fraction massique de CO_2 dissous dans la phase liquide, G le débit massique surfacique total, et, pour la partie diphasique, G_l le débit massique surfacique du liquide, x le titre massique de gaz et G_g le débit massique surfacique du gaz. Partout où cela est possible, on négligera la masse volumique du gaz devant celle du liquide.

Question 4

Quel est le débit massique surfacique de CO_2 dissous dans la partie en écoulement monophasique ?

Quel est le débit massique surfacique de CO_2 dissous dans la phase liquide pour la partie en écoulement diphasique ?

Quel est le débit massique surfacique de CO_2 contenu dans la phase gazeuse pour la partie en écoulement diphasique ?

Ecrire le bilan de masse de l'espèce CO_2 .

En déduire x en fonction de y et y_1 .

Question 5

On utilise le modèle homogène. Donner la relation entre titre massique x et fraction volumique α .

Question 6

On suppose de plus qu'on est localement partout à l'équilibre thermodynamique (condition de saturation). Calculer le titre de sortie x_2 et la fraction volumique en sortie α_2 .

Question 7

Ecrire le bilan de quantité de mouvement du mélange, sous la forme d'un gradient de pression, en utilisant le modèle homogène. La friction sera exprimée en fonction de la contrainte de friction en paroi, notée τ_w , et sera modélisée plus loin.

Modélisation des pertes de pression en diphasique

Les différentes contributions à la perte totale de pression dans la partie diphasique de la conduite sont :

- La perte de pression hydrostatique ΔP_g ;
- La perte de pression par accélération ΔP_{Acc} ;
- La perte de pression par frottement ΔP_{Fric} .

Pour les calculs, on suppose que la variation en z de la fraction volumique est linéaire. Cette hypothèse peut-être vérifiée *a posteriori* par une intégration numérique des équations. On cherche maintenant à comparer les différents termes de pertes de pression.

Question 8

Déterminer ΔP_g . En estimer la valeur pour $z_s = z_{s,0}$.

Comme on le montrera plus loin, le terme moteur de l'écoulement est la différence entre ce terme et la différence de pression hydrostatique pour le liquide entre les cotes z_s et z_2 .

Question 9

Exprimer ΔP_{Acc} en fonction de ρ_l , U_l et ρ_2 .

Question 10

On modélisera la contrainte en paroi τ_w par la friction d'un pseudo-fluide monophasique de masse volumique ρ s'écoulant au débit massique surfacique G , avec un coefficient de multiplication éventuel K . Exprimer ΔP_{Fric} en fonction de ρ_l , U_l , D , h , z_s , C_f et K .

Question 11

Comparer les deux termes précédents en prenant $z_{s,0}$ et $K = 1$. Peut-on négliger les pertes de pression par accélération ?

Question 12

En déduire l'expression de la différence de pression entre les cotes z_s et z_2 .

Question 13

Rassembler les deux bilans de quantité de mouvement pour en déduire une expression de U_l en fonction de h , z_s , C_f , K , ρ_2 et ρ_l . Résoudre itérativement le système en partant de $z_{s,0}$.

Questions subsidiaires

- A quelle hauteur jaillit le jet ?
- L'expérience fonctionne à $U_l = 3.3 \text{ m.s}^{-1}$. Comment peut-on expliquer l'écart ?

Troisième partie

Annexes

A Propriétés thermodynamiques des fluides

On pourra consulter Claudel (1996) pour plus de détails. On ne considérera que des systèmes *divariants*, c'est-à-dire entièrement caractérisés par deux variables indépendantes. Les variables *normales* sont la masse volumique ρ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) et l'entropie spécifique s ($\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$). Un autre choix commode de variables est ρ et T la température (K). La loi d'état s'exprime formellement (p est la pression en Pa^1) :

$$p = f(\rho, s) \text{ ou } p = g(\rho, T)$$

A.1 Rappels sur le second principe et l'entropie

Le second principe est un principe d'évolution. Il nous renseigne sur le sens dans lequel les évolutions naturelles ont lieu² : "il ne peut pas s'effectuer, sans compensation, de passage de chaleur d'un corps froid à un corps chaud."

On introduit alors une fonction d'état, appelée entropie s , telle que

$$\delta q_{rev} = T ds$$

Elle s'exprime en $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Le principe d'évolution s'exprime par le fait que pour toute transformation d'un système isolé :

$$ds \geq \frac{\delta q}{T}$$

Cette fonction d'état ne se conserve pas sauf pour une transformation adiabatique réversible. La physique statistique éclaire cette notion, en liant l'entropie d'un système à l'information contenue. Les transformations réelles sont irréversibles à cause de phénomènes dissipatifs. Le système ne peut jamais spontanément revenir en arrière. L'énergie mécanique macroscopique « ordonnée » est perdue par le système sous forme d'augmentation de l'énergie interne microscopique « désordonnée ».

On construit l'échelle absolue de température à partir de la notion d'entropie : par définition, à 0K, $s = 0$ pour un corps pur cristallisé.

Enfin, une relation utile que l'on déduit des premier et second principes est la relation de Gibbs :

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho}$$

En effet, en cas de compression ou détente isentropique, par exemple, on a simplement $dh_s = \frac{dp}{\rho}$. On peut en déduire $\Delta h_s = \int_1^2 \frac{dp}{\rho}$, si on connaît le chemin suivi au cours de la transformation entre l'état initial 1 et l'état final 2. Dans le cas particulier d'un fluide en écoulement incompressible, $\rho = \text{cte}$, donc $\Delta h_s = \frac{\Delta p}{\rho}$.

A.2 Loi d'état du gaz parfait

— La théorie cinétique des gaz permet d'établir un lien entre l'énergie cinétique moyenne d'une molécule du gaz due à l'agitation thermique et la température absolue (c'est une

1. On rappelle que la pression est une force par unité de surface. Donc $1\text{Pa} = 1\text{N}\cdot\text{m}^{-2} = 1\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{m}^{-3} = 1\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$. La pression est aussi une densité d'énergie, ce qui est éclairé par la théorie cinétique des gaz

2. Formulation originale de Clausius

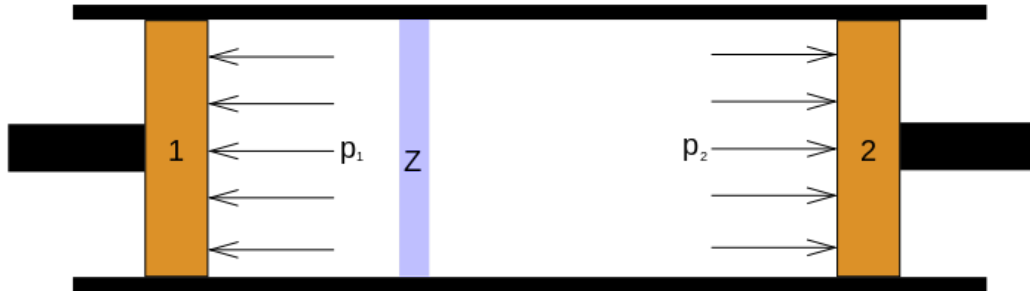


FIGURE 19 – Détente de Joule-Thomson. Cette expérience consiste à équilibrer les pressions de deux enceintes, initialement aux pressions p_1 et p_2 , de manière quasi-statique à travers un tampon d'ouate. L'ensemble est calorifugé. L'expérience montre que pour la plupart des gaz la température dans l'état final est la même que dans l'état initial. Comme le système total n'échange ni travail, ni chaleur avec l'extérieur son énergie est constante et donc celle ci ne dépend pas de la pression pour ces gaz. (image issue de : <http://www.wikipedia.org>)

définition de la température) :

$$\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$$

où $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann.

La loi d'état d'un gaz parfait mono-atomique est alors, avec n le nombre de molécules par unité de volume :

$$p = nkT = \rho rT$$

où $r = k \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}}$ est la constante du gaz considéré ($\mathcal{N} = 6.02 \times 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro, \mathcal{M} la masse molaire du gaz).

- Pour un gaz parfait, énergie et enthalpie spécifiques ne sont fonctions que de la température (voir Fig. 19) :

$$\begin{aligned} de &= c_v(T)dT \\ dh &= c_p(T)dT \end{aligned}$$

Les deux coefficients c_v et c_p sont respectivement les capacités calorifiques à volume constant et à pression constante. La capacité calorifique s'exprime en $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. C'est en fait la quantité d'énergie qu'il faut fournir pour élever de 1 K la température de 1 kg du matériau considéré.

On a de plus :

$$c_p(T) - c_v(T) = r$$

- Un gaz parfait polytropique est tel que c_p et c_v sont constants. On note leur rapport :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

On rappelle la relation de Gibbs (valable pour tout corps) :

$$dh = Tds + \left(\frac{1}{\rho}\right) dp$$

Et donc, pour un gaz parfait polytropique :

$$\begin{aligned} dh &= c_p dT \\ T ds + \left(\frac{1}{\rho}\right) dp &= c_p dT \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} \\ ds &= c_p \left(\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dp}{p} \right) \end{aligned}$$

D'où les lois de Laplace pour une évolution isentropique :

$$\begin{aligned} T^\gamma p^{1-\gamma} &= \text{cte} \\ p \rho^{-\gamma} &= \text{cte} \end{aligned}$$

A.3 Changements de phase

Un corps pur est susceptible d'exister sous différentes phases. Les phases solides et liquides sont des phases *condensés*. En phase solide, les atomes du corps pur sont en général organisés en réseau cristallin. Le corps en phase liquide se comporte comme un fluide : il coule, remplit le récipient qui le contient, on définit une viscosité³, ... Dans la phase gazeuse, le corps se comporte également comme un fluide.

Pour une pression p et une température T , une de ces trois phases est stable (voir Fig. 20). Le long des droites séparants les domaines, les phases peuvent coexister : on parle de transitions de phase. Pour un corps pur tel que l'eau, les transitions sont dites *du premier ordre* : on a discontinuité d'une propriété physique au changement de phase, par exemple la masse volumique, celle-ci changeant d'un facteur 1000 entre l'eau liquide et sa vapeur.

Les **transitions** de premier ordre sont celles qui impliquent une *chaleur latente*. Au cours de ces transitions, le système absorbe ou émet une quantité d'énergie fixe (et en général grande), à *pression et température constantes*. C'est l'un des moyens les plus efficaces d'absorber une grosse quantité d'énergie avec une quantité de matière donnée⁴. Le fait de passer d'un état à un autre permet un transfert thermique très élevé à la paroi où il se produit, dans un sens ou dans l'autre suivant la transformation.

Il existe une relation entre chaleur latente massique $h_{l,v}$ (J.kg^{-1}) et variation d'entropie massique $\Delta_{l \rightarrow v} s$ ($\text{J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$) lors d'une transition entre les phases liquide et vapeur à la température T_0 :

$$\Delta_{l \rightarrow v} s = \frac{h_{l,v}}{T_0}$$

Il existe un point *triple* où les trois phases coexistent. Le point triple de l'eau sert de référence à l'échelle de température absolue ($T = 273.16 \text{ K}$ et $p = 611 \text{ Pa}$).

3. Viscosité qui trouve souvent son origine dans les interactions de type van der Waals entre molécules, dans le cas d'un liquide. Pour un gaz parfait en revanche, la viscosité trouve son origine dans les transferts de quantité de mouvement qui se font par choc entre sphères dures

4. Pour 1 kg d'eau, sous 1 bar, à 25 °C, pour augmenter sa température de 1 °C, il faut lui fournir 4.18kJ. La chaleur latente de vaporisation de l'eau vaut 2257 kJ.kg⁻¹ sous 1 bar à 100 °C : pour transformer entièrement 1 kg d'eau liquide en vapeur, il faut lui fournir 2257 kJ, soit 540 fois plus.

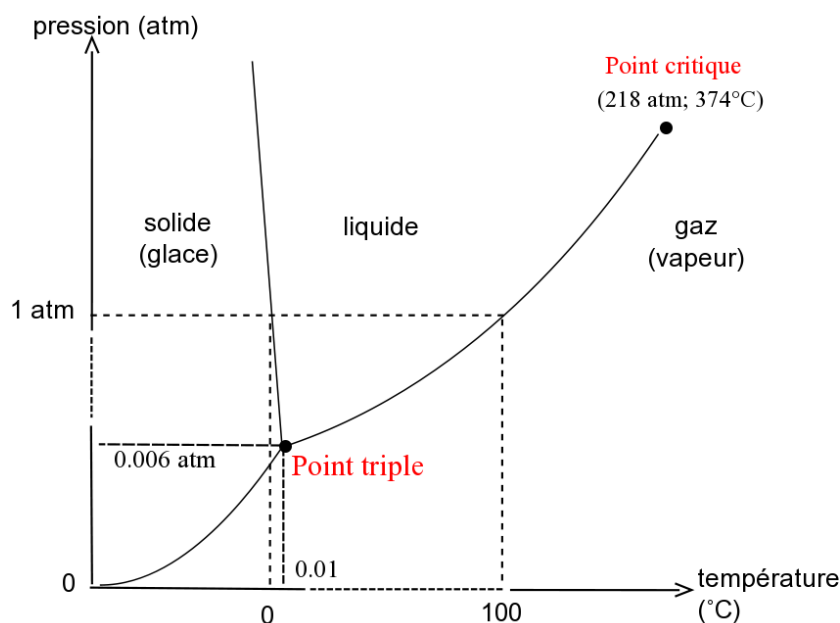


FIGURE 20 – Exemple de diagramme de phase de l'eau. (image issue de : <http://www.wikipedia.org>)

Il existe également un point *critique* au delà duquel on ne peut plus distinguer entre liquide et vapeur : la transition de phase est du second ordre, il n'y a plus de chaleur latente. Pour l'eau : $T_c = 647.3\text{K}$ et $p_c = 22.09\text{MPa}$.

A l'intérieur de la zone diphasique, pour un mélange contenant une masse m_l de liquide et une masse m_v de vapeur, toute propriété extensive y (y_v pour la phase vapeur, y_l en phase liquide)⁵ y vérifient la règle dite du levier :

$$y = y_v \chi + y_l (1 - \chi)$$

$$\chi = \frac{m_v}{m_v + m_l}$$

La variable χ est le titre (massique) de vapeur dans le mélange.

A.4 Diagrammes thermodynamiques

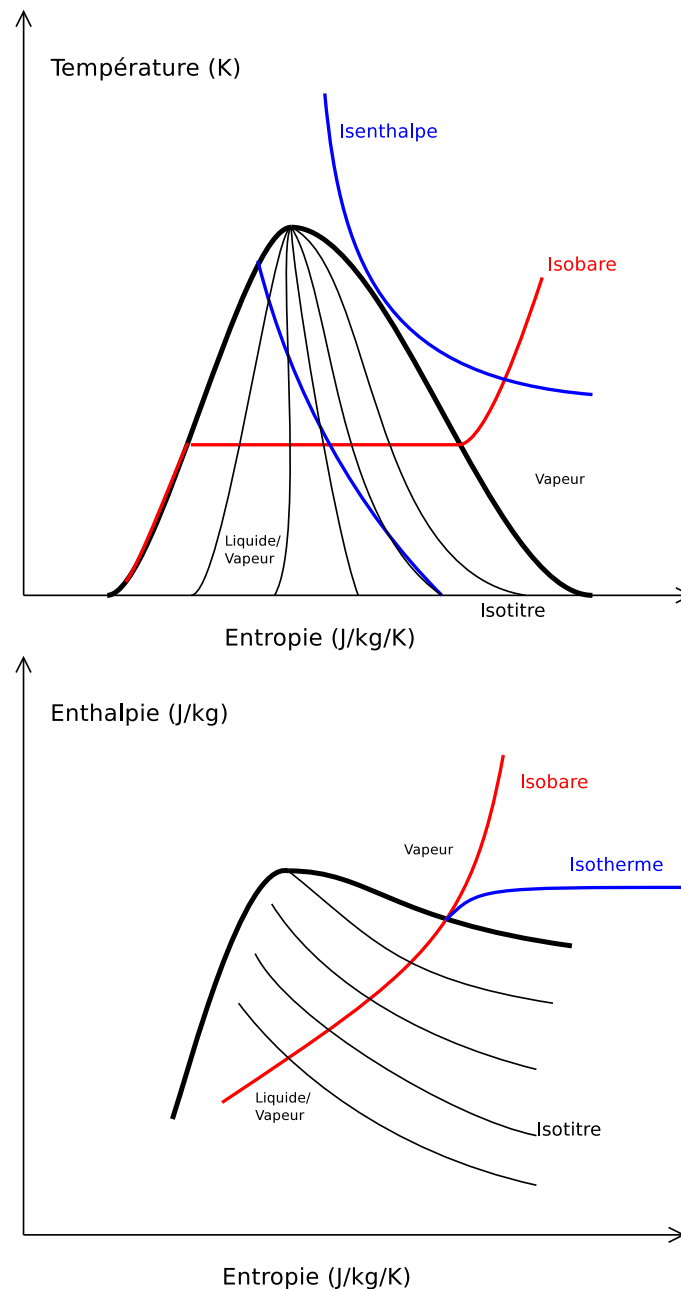
Les diagrammes thermodynamiques permettent d'avoir sous forme graphique les propriétés d'un fluide en fonction des variables thermodynamiques

On peut représenter les évolutions dans différents espaces (voir Fig. 21), par exemple en prenant comme variables (p et V), ou (T et s), ou (p et h) ou encore (h et s). Tous ces diagrammes thermodynamiques ont les caractéristiques suivantes :

- Un ensemble de courbes isobares, isochores, isothermes, isenthalpes ou isentropes ;
- Une courbe de saturation en cloche qui délimite les domaines liquide / liquide-vapeur / vapeur ;
- Pour les corps purs, les isobares et les isothermes sont confondus dans la zone diphasique.

Les différents diagrammes usuels sont :

5. Par exemple h, s, v

FIGURE 21 – Diagrammes $T - s$ et $h - s$ de l'eau. (©F.R. 2010)

- Le diagramme de Clapeyron $P - v$. On trace en abscisses le volume massique et en ordonnées la pression. Son intérêt est que le travail fourni ou consommé durant le cycle est égal à l'aire soustendue par le cycle. Si le parcours est effectué dans le sens horaire, le travail reçu est négatif et le cycle est moteur. Sinon, le cycle est récepteur.
- Le diagramme entropique $T - s$. On trouve en abscisses l'entropie massique et en ordonnées la température absolue. Sur un tel diagramme, le cycle de Carnot est simplement représenté par un rectangle. Il est également utile pour calculer les transferts thermiques à température constante : $Q = T\Delta S$ pour une transformation réversible, ce qui correspond à l'aire située sous la transformation. On peut alors visualiser le rendement d'un cycle : l'énergie utile est représentée par la surface formée au dessus de la ligne de condensation

alors que l'énergie perdue dans la source froide est représentée par la surface formée entre la ligne de condensation et le zéro absolu.

- Le diagramme de Mollier $h-s$. Il est utilisé principalement pour l'étude des cycles moteurs à vapeur. Comme pour le diagramme $T-s$, la zone liquide est quasi confondue avec la courbe de condensation et n'est en principe pas représentée. Il est très utile pour calculer le travail obtenu lors d'une détente isentropique (ou non) dans une turbine : connaissant les pressions hautes et basses, ainsi que l'enthalpie de départ, on peut en déduire le Δh qui est le travail récupéré. On peut alors lire sur le diagramme le titre en vapeur en sortie de turbine.

A.5 Progiciels et données numériques

- On pourra trouver les propriétés thermodynamiques des fluides usuels sur le site du NIST (National Institute of Standards and Technology) :
<https://webbook.nist.gov/chemistry/fluid/>
- *Coolprop* est une librairie libre, interfaçable avec les principaux langages de programmation (python, C#, C++), logiciels de calcul numérique (Matlab, Octave, Scilab) et logiciels de bureautique (Excel, LibreOffice) :
<http://www.coolprop.org>

B Transferts thermiques dans les fluides

Pour de plus amples informations, vous pouvez consulter l'ouvrage de Incropera *et al.* (2007).

La chaleur, notée Q , est une forme d'énergie, elle s'exprime en Joule. Par convention, lorsque le fluide reçoit de la chaleur, cette quantité est positive. Lorsqu'il en perd, elle est négative. Dans le cadre des transferts thermiques, on s'intéresse souvent aux flux de chaleur, c'est-à-dire à des puissances thermiques. Ce flux s'exprime en $\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$ c'est-à-dire en W . Nous le noterons \dot{Q} . Enfin, les transferts thermiques qui nous intéressent ont souvent lieu à travers l'interface entre deux milieux. Il est alors plus pratique d'utiliser la densité surfacique de flux de chaleur, notée ici φ , exprimée en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

B.1 Modes de transfert de chaleur

La chaleur peut être transmise par conduction, convection ou rayonnement. Ce dernier mode ne prend de l'importance qu'en cas de fortes différences de températures ou lorsque les deux premiers modes de transfert sont impossibles (présence de vide) ; il ne sera pas abordé ici.

Conduction

La conduction est un mode de transfert diffusif : dans un milieu soumis à une différence de température, le transfert de chaleur conductif s'effectue sans déplacement de matière. Le mécanisme de propagation de la chaleur repose sur les vibrations des atomes ou sur une transmission par les électrons libres. La conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température. Le coefficient de proportionnalité λ ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) est la conductivité thermique du milieu.

$$\varphi = -\lambda \nabla T$$

Le signe moins implique que le transfert est dirigé des hautes températures vers les basses températures. Il existe une analogie très forte entre la loi de Fourier et la loi d'Ohm en électricité,

la température jouant ici un rôle de potentiel, et la densité de flux de chaleur étant l'analogie d'une densité de flux de courant électrique. Les conductivités thermiques et électriques sont d'ailleurs fortement corrélées.

Dans les métaux, la conductivité thermique est très bonne : $\lambda \simeq 400 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ pour le cuivre. L'eau a une conductivité de l'ordre de $0.6 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, et l'air, très bon isolant, a une conductivité de l'ordre de $0.025 \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Convection

C'est un mode de transfert par déplacement de matière. C'est pourquoi on le rencontre dès que l'on s'intéresse à des milieux fluides. Pour le transfert entre une paroi solide à la température T_w et un fluide la balayant en venant d'un infini amont à la température T_∞ , on a :

$$\varphi = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{wall} = h (T_w - T_\infty)$$

La première égalité est une conséquence de la loi de Fourier, mais demande l'évaluation du gradient de température à la paroi. C'est pourquoi on introduit la seconde égalité, qui définit un coefficient h de transfert thermique. Ce coefficient s'exprime en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Sa valeur est fonction de la nature du fluide, de sa vitesse et de la géométrie du problème. On peut le calculer analytiquement pour des cas simples comme celui d'une plaque plane parallèle à l'écoulement, en régime laminaire.

On peut retenir quelques ordres de grandeur :

- Pour l'air, en convection libre¹, on a $h \simeq 5 - 50 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.
- En convection forcée dans l'air, on a $h \simeq 10 - 500 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.
- Pour l'eau, en convection libre on a $h \simeq 100 - 1000 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.
- Pour l'eau en convection forcée $h \simeq 10^2 - 10^4 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.
- On peut atteindre des valeurs de l'ordre de $10^5 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ pour des métaux liquides, ou pour la vapeur d'eau se condensant.

B.2 Utilisation des nombres adimensionnels et corrélations

L'intérêt du coefficient d'échange est de lier la densité de flux de chaleur à l'écart de température entre le fluide et la paroi. La valeur de ce coefficient dépend du type de fluide, de l'écoulement, et est susceptible de varier de plusieurs ordres de grandeurs. Dans certains cas, on peut calculer analytiquement h . Dans le cas général, on utilisera des lois empiriques ou semi-empiriques que l'on trouvera dans des livres spécialisés (voir par exemple Padet (2017a,b,c) ou Incropera *et al.* (2007)).

Convection forcée

Considérons par exemple le cas de la convection forcée par un écoulement en conduite infinie (voir Fig. 22). On suppose le fluide en écoulement incompressible, et avec des propriétés constantes. Le but est d'exprimer la densité de flux de chaleur φ en fonction des paramètres physiques et géométriques du problème.

Afin de chercher une solution sous la forme la plus générale, effectuons tout d'abord une analyse dimensionnelle. La relation que l'on cherche peut s'exprimer sous la forme

1. L'écoulement est une conséquence des variations de densité du fluide, causées par les variations de température. En convection forcée, on impose un écoulement

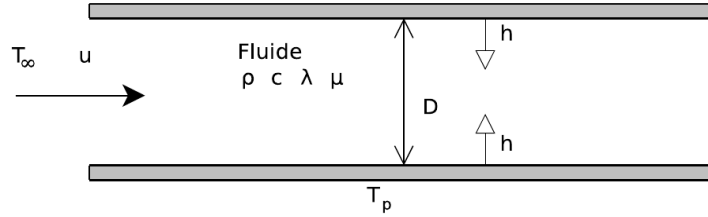


FIGURE 22 – Transfert thermique par convection dans un tube infini de diamètre D . Le fluide de masse volumique ρ , de viscosité dynamique μ , de capacité calorifique massique c et de conductivité thermique λ s'écoule depuis un infini amont à la vitesse u , et à la température T_∞ . La paroi est maintenue à la température T_p , et un flux de chaleur existe entre la paroi et le fluide, caractérisé par le coefficient de transfert h . (©F.R. 2009)

$$f(D, \rho, \mu, c, \lambda, u, (T_\infty - T_p), \varphi) = 0$$

Dans notre cas, on a besoin de définir une jauge de temps T , de longueur L , de masse M , de température θ , et, dans ce problème de thermique, une jauge pour la quantité de chaleur Q considérée comme une cinquième dimension fondamentale. Le choix $L = D$, $M = \rho D^3$, $T = D/u$, $\theta = (T_\infty - T_p)$ et $Q = \lambda D^2 (T_\infty - T_p)/u$ conduit à la relation

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} = g(Pr, Re)$$

avec :

- $Re = \frac{\rho u D}{\mu}$ le nombre de Reynolds.
- $Pr = \frac{c\mu}{\lambda}$ le nombre de Prandtl, qui est une caractéristique physique du fluide employé. Il compare les coefficients de diffusion de quantité de mouvement (*i.e.* la viscosité cinématique) et de diffusion de la chaleur : $Pr = \frac{\mu}{\rho} \frac{\rho c}{\lambda}$. Dans le cas d'un gaz, où ces deux processus de diffusion ont le même mécanisme physique, à savoir les chocs entre molécules², le nombre de Prandtl est d'ordre 1 (à température usuelle, $Pr = 0.7$ pour l'air, et $Pr = 1.05$ pour la vapeur d'eau). Pour les liquides, le nombre de Prandtl est d'autant plus grand que le fluide est « huileux » : $Pr = 7$ pour l'eau, $Pr = 10^4$ pour une huile moteur, mais $Pr = 0.025$ pour le mercure et $Pr = 10^{-5}$ pour le sodium liquide.
- $Nu = \frac{hD}{\lambda}$ le nombre de Nusselt. C'est le coefficient de transfert thermique sous forme adimensionnelle. On peut également l'écrire comme le rapport de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection. Il est d'autant plus élevé que la convection est prédominante sur la conduction.

Tout l'enjeu est maintenant d'exprimer la fonction g reliant nombres de Nusselt, de Prandtl et de Reynolds. La plupart des corrélations se présentent sous la forme :

$$Nu = aRe^b Pr^c$$

Par exemple, pour un écoulement turbulent dans un tube, On utilisera la corrélation de Dittus et Boelter (Incropera *et al.*, 2007) :

2. Pour en savoir plus, le mot-clé à rechercher est « théorie cinétique des gaz »

$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^n$$

$$n = 0.3 \text{ pour fluide se refroidissant}$$

$$n = 0.4 \text{ pour fluide se réchauffant}$$

$$Re \geq 10^4 \text{ et } 0.7 \leq Pr \leq 160$$

Ou encore, pour un écoulement laminaire dans un tube long :

$$Nu = 3.66 \text{ pour température de paroi imposée et uniforme}$$

$$Nu = 4.36 \text{ pour flux de chaleur imposé et uniforme}$$

$$Re \leq 2 \times 10^3 \text{ et } \frac{L}{D} \geq 0.1RePr$$

Convection naturelle

La convection naturelle est la mise en mouvement d'un fluide dans un champ de pesanteur, sous l'effet des variations de sa masse volumique avec la température. En utilisant pour variables la pression et la température, on peut écrire pour un fluide monophasique divariant :

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - T\beta) dp$$

Dans cette expression, β (en K^{-1}) est le coefficient de dilatation isobare :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Pour un gaz parfait, on montre que $\beta = 1/T$ et on retrouve bien le fait que l'enthalpie ne dépend que de la température ($dh = c_p dT$). Pour l'eau entre $4^\circ C$ et $100^\circ C$, on a $\beta \simeq 4 \times 10^{-4} K^{-1}$. Un développement limité au premier ordre de la densité en fonction de la température donne l'*approximation de Boussinesq* :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0))$$

Pour les problèmes de convection naturelle, avec *température de paroi imposée*, on utilise le nombre de Grashof Gr , rapport des forces de flottabilité aux forces visqueuses :

$$Gr = \frac{g\beta (T_p - T_f) L^3}{\nu^2}$$

Dans cette expression, T_p désigne la température de paroi, T_f la température du fluide loin de la paroi, L une longueur de référence, et ν la viscosité cinématique. Les corrélations employées seront alors de la forme :

$$Nu = a(GrPr)^b$$

Par exemple, pour la convection naturelle le long d'une plaque verticale de longueur L , une corrélation pour le nombre de Nusselt calculé sur toute la longueur est :

$$Nu_L = 0.59 (GrPr)^{1/4}$$

pour $GrPr \leq 10^9$

$$\text{et } Nu_L = 0.13 (GrPr)^{1/3}$$

pour $10^9 \leq GrPr \leq 10^{13}$

Pour les problèmes de convection naturelle, avec *flux imposé en paroi*, on utilise un nombre de Grashof modifié Gr^* :

$$Gr^* = \frac{g\beta z^3 \varphi z}{\nu^2 \lambda}$$

On trouvera alors des corrélations pour le nombre de Nusselt local basé sur la distance z depuis la base de la plaque :

$$Nu_z = 0.6 (Gr^* Pr)^{1/5}$$

pour $Gr^* Pr \leq 10^{11}$

et $Nu_z = 0.57 (Gr^* Pr)^{0.22}$

pour $10^{13} \leq Gr^* Pr \leq 10^{16}$

B.3 Transferts en ébullition

Ebullition libre

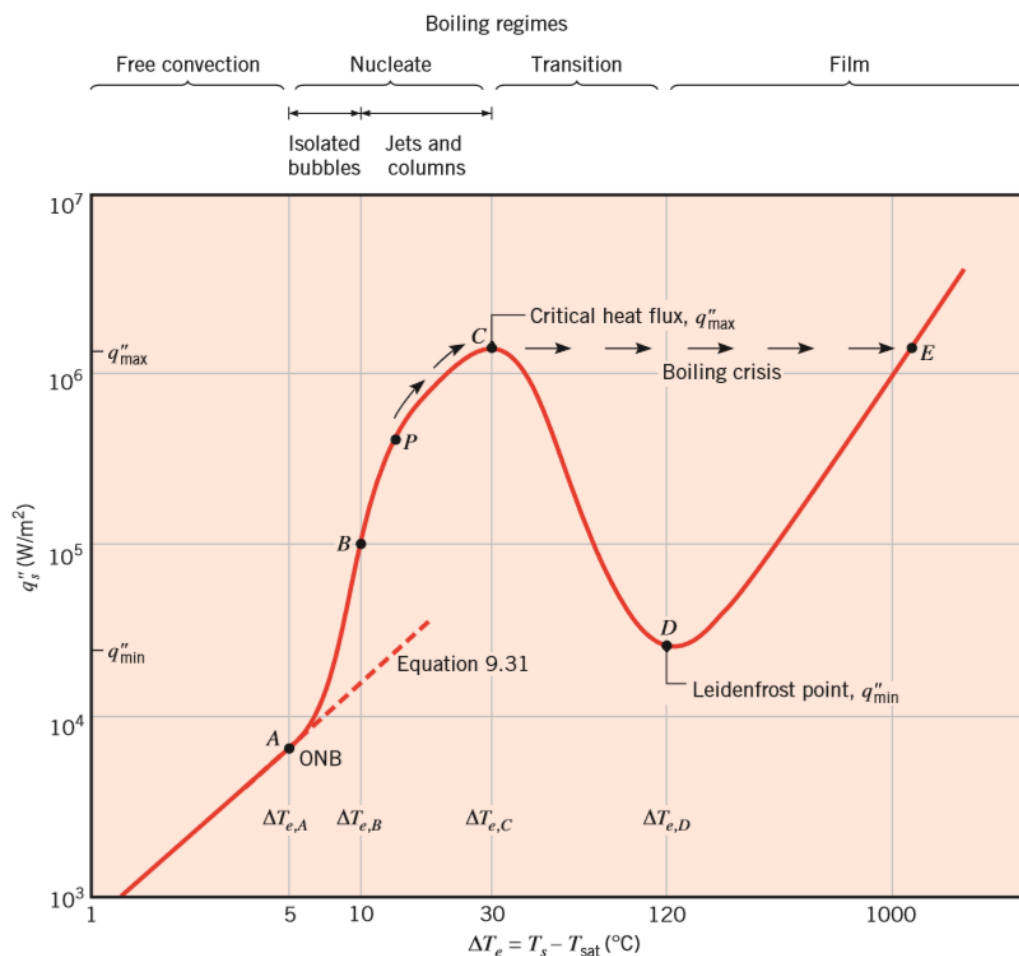


FIGURE 23 – Courbe d'ébullition libre en eau distillée, expérience de Nukiyama. A titre d'exercice, numérisez la courbe et tracez le coefficient de transfert de chaleur en fonction de la surchauffe, puis en fonction de la densité de flux de chaleur

Une des premières études expérimentales relatives à l'ébullition dans un fluide au repos est celle de Nukiyama en 1934. Dans cette expérience, on chauffe électriquement un fil de platine immergé dans de l'eau distillée maintenue à sa température de saturation. On peut alors mesurer à la fois la puissance injectée en mesurant le courant et la tension aux bornes du fil, et la température du fil en utilisant la variation de sa résistance électrique avec la température. Le résultat d'une telle expérience est tracé en Fig. 23.

En augmentant progressivement le flux de chaleur, on observe tout d'abord un régime de *convection naturelle*, caractérisée par une dépendance en loi de puissance du coefficient de transfert thermique avec l'écart de température (voir les corrélations évoquées en fin de paragraphe précédent). Puis pour un écart de température de l'ordre de 5 K (point A de la Fig. 23), les premières bulles de vapeur apparaissent. Ce point est appelé "Onset of Nucleate Boiling" (ONB). Au delà, on passe en régime d'*ébullition nucléée*. Le coefficient de transfert thermique augmente alors très rapidement. Au delà d'un *flux critique* q''_{max} , on a la *crise d'ébullition* : un film de vapeur entoure totalement la paroi et la température augmente brutalement, de plusieurs centaines de degrés (on passe du point C au point E sur la Fig. 23) ; le coefficient de transfert de chaleur chute brutalement. On a un régime d'*ébullition en film*. En baissant le flux de chaleur, on a alors de l'hystérésis et on parcourt la branche ED en Fig. 23. Le point D correspondant à un minimum de flux en régime d'ébullition en film est appelé point de Leidenfrost. Une baisse du flux fait revenir sur la branche d'ébullition nucléée. On peut noter que la branche CD ne peut être atteint qu'en imposant la température, sur cette branche on observe de grandes fluctuations du flux.

En régime d'ébullition nucléée, la corrélation semi-empirique de Rohsenow est la plus utilisée :

$$\varphi = \mu_l h_{lv} \sqrt{g \frac{\rho_l - \rho_v}{\sigma}} \left(\frac{c_l (T_p - T_{sat})}{K h_{lv} Pr_l^n} \right)^3$$

Dans cette expression, h_{lv} est la chaleur latente, μ_l la viscosité dynamique du liquide, σ la tension interfaciale liquide/vapeur, c_l la capacité calorifique massique du liquide et Pr_l le nombre de Prandtl du liquide ; la valeur de la constante K et de l'exposant n dépendent du couple fluide/paroi. On a $K \simeq 0.01$ et $n \simeq 1$. Par analyse dimensionnelle, on a également l'expression suivante pour le flux critique :

$$q''_{max} = C h_{lv} \rho_v \left(\sigma g \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_v^2} \right)^{1/4}$$

On recommande la valeur $C = 0.131$ pour un calcul correct d'ordre de grandeur, la constante dépendant de la géométrie.

Ebullition convective

Jusqu'ici, les résultats décrits et les corrélations évoquées concernent l'ébullition *naturelle*. Dans le cas d'un écoulement interne avec transfert de chaleur et changement de phase (type écoulement eau / vapeur), l'écoulement va rencontrer différents régimes au cours de sa traversée de la conduite (voir Fig. 2) : il y a un couplage non-trivial entre l'écoulement et différents régimes d'ébullition. La vapeur peut en effet se former par deux mécanismes : soit par nucléation en paroi, soit par vaporisation au niveau des interfaces au sein de l'écoulement. Les différentes étapes pour le cas canonique d'un tube où l'écoulement est vertical ascendant et où un flux thermique uniforme en paroi est imposé sont les suivantes (voir les illustrations en Fig. 24) :

— Tout d'abord, on suppose que l'écoulement rentre sous forme liquide à une température

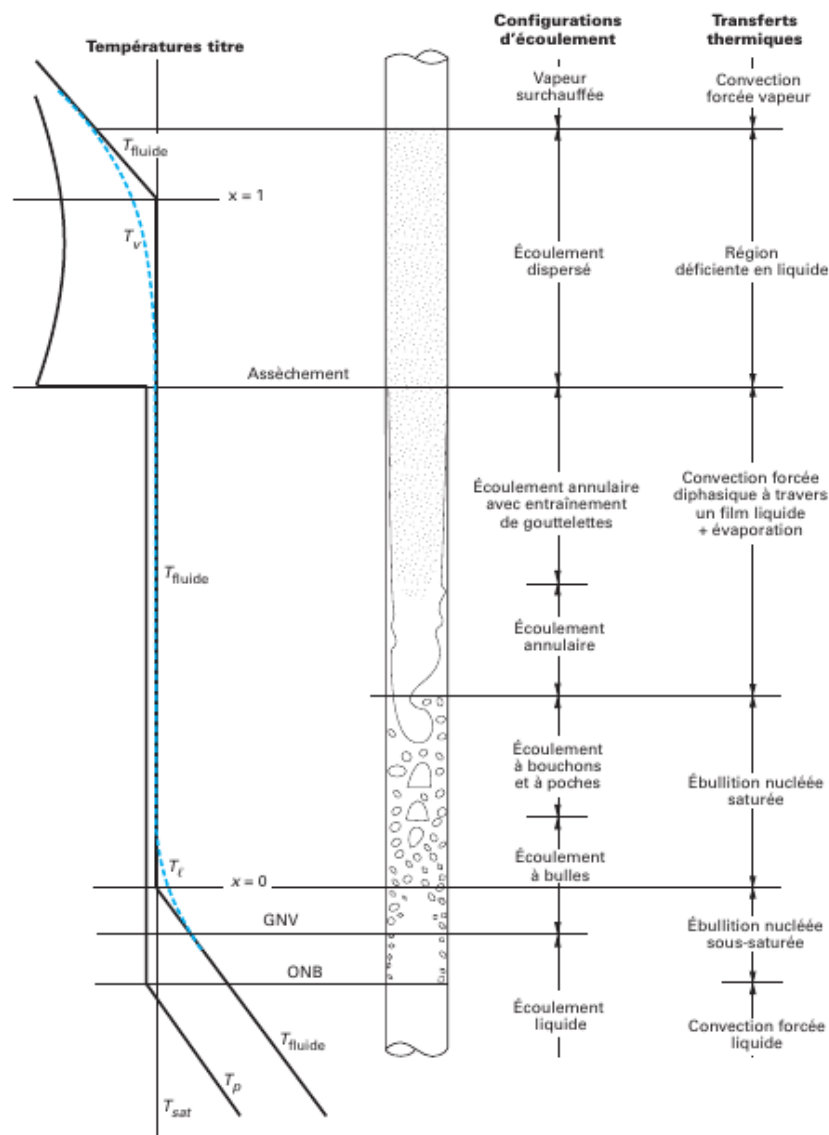


FIGURE 24 – Configurations d'écoulement et régimes de transferts thermiques dans un tube vertical chauffé

inférieure à la température d'ébullition en bas de la colonne. Celui-ci va se réchauffer par convection forcée. La température de la paroi augmente jusqu'à la température de saturation.

- On rentre alors dans la zone d'ébullition nucléée sous-refroidie (ONB pour "Onset of Nucleate Boiling" sur la figure) : le liquide en paroi est à la température de saturation et il y a formation de bulles qui se recondensent dans le courant de liquide de température inférieure à celle de saturation.
- L'ébullition nucléée se développe dans toute la masse de liquide qui arrive à la température de saturation. Le coefficient de transfert thermique est le plus fort.
- Les bulles très nombreuses coalescent pour former des bouchons de vapeur se rassemblant au centre de la conduite : on est en régime à poches.
- Puis on passe en écoulement annulaire. On observe que la surface de la pellicule liquide en contact avec le noyau central de vapeur est extrêmement agitée et par la suite se produit

une évaporation intense en même temps qu'un arrachement des gouttelettes liquides.

- Il y a maintenant un contact direct entre la vapeur et la paroi chauffante. Il ne reste que de minuscules gouttelettes en suspension dans la vapeur, d'où l'appellation d'écoulement à brouillard (*mist flow*). Dans cette zone de vapeur saturée humide le transfert de chaleur a lieu par convection forcée en vapeur et par évaporation des gouttes de liquide.
- Il n'y a plus de phase liquide. Il existe seulement un écoulement simple de vapeur sèche qui respecte les lois de la convection forcée monophasique.

Notons que les évolutions de température représentées en Fig. 24 supposent implicitement que la pression du système est constante, ce qui n'est en toute rigueur pas le cas, ne serait-ce que par un effet purement hydrostatique. La modélisation de l'évolution de la pression le long de la conduite doit alors faire appel au bilan de quantité de mouvement.

C Bilans en écoulements multiphasiques

C.1 Simplification des équations de bilan moyennées sur la section de la conduite

On entend par écoulement multiphasique un écoulement où plusieurs corps (eau, huile, particules solides, air), éventuellement sous différentes phases (liquide ou gazeuse) circulent dans une même conduite. Pour plus de détails et une approche théorique plus complète, on pourra consulter les ouvrages de Delhaye (2008) et Borghi & Anselmet (2014). Nous n'exposerons ici que les principes généraux d'une modélisation simplifiée, en nous restreignant au cas d'un liquide à l'équilibre *thermodynamique* avec sa vapeur (Lallemand, 2006).

Dans le cas d'un écoulement multiphasique, on fera des bilans dans un volume de contrôle fixe non matériel $V = \sum_{i=1\dots N} V_i(t)$, constitué des volumes occupés à chaque instant par chaque phase. Ces volumes dépendent du temps, et sont séparés par des interfaces mobiles. Le traitement est ainsi plus complexe. On doit en particulier prendre en compte les conditions aux interfaces. Si on cherche à obtenir des équations moyennées sur une section —l'opérateur de moyenne étant noté $\langle \rangle_z$ — on devra calculer des moyennes de produit et s'intéresser aux coefficients de corrélation¹

$$C_{a,b} = \frac{\langle ab \rangle_z}{\langle a \rangle_z \langle b \rangle_z}$$

La version simplifiée des équations de bilans moyennées sur la section consiste à :

- Se placer dans le cadre de l'approximation d'écoulement uniforme ;
- Prendre des coefficients de corrélations tous égaux à 1 ;
- Négliger les gradients longitudinaux des contraintes visqueuses et de la conduction thermique dans le bilan d'énergie ;
- Regrouper tous les effets non pris en compte pour le bilan de quantité de mouvement dans un terme de contrainte pariétale moyenne τ_w ;
- Supposer que l'on est à l'équilibre thermodynamique local.

1. Les facteurs de corrections α et β vus aux chapitres I.3 et I.4 sont eux même des coefficients de corrélations tels que ceux définis ici !

C.2 Paramètres propres aux écoulements multiphasiques

On considère 2 phases indicées par $i = 1, 2$ s'écoulant dans une conduite de section $S(x)$ (x est une coordonnée curviligne le long de l'axe de la conduite). Les masses volumiques sont notées ρ_i . Les débits massiques sont notés \dot{m}_i . On notera :

$$\dot{m} = \sum_{i=1..2} \dot{m}_i$$

Cette quantité représente le débit massique du mélange.

On définit le titre massique de la phase i par :

$$\xi_i = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}}$$

On a la relation immédiate :

$$\sum_{i=1..2} \xi_i = 1$$

Pour deux phases, on en choisira une pour référence, par défaut la phase vapeur, et on exprimera uniquement le titre en vapeur ξ , le titre en liquide s'en déduisant par $1 - \xi$.

On définit la fraction volumique (appelée aussi taux de vide) par la fraction de conduite occupée par une phase. Si la phase i occupe une surface S_i de la conduite de section S , alors :

$$\alpha_i = \frac{S_i}{S}$$

La vitesse moyenne d'une phase U_i est telle que :

$$\dot{m}_i = \rho_i S_i U_i$$

Si les deux phases ne coulent pas à la même vitesse, on parle de *glissement* entre les phases. Ce phénomène peut être observé par exemple en conduite verticale où des bulles de gaz vont avoir tendance à monter plus vite que la phase liquide. On introduit le rapport de glissement \mathcal{S} , rapport de la vitesse moyenne de la phase de référence à la vitesse moyenne de l'autre phase :

$$\mathcal{S} = \frac{U_v}{U_l} = \frac{\dot{m}_l \rho_l S_l}{\dot{m}_v \rho_v S_l} = \left(\frac{\xi}{1 - \xi} \right) \left(\frac{\rho_l}{\rho_v} \right) \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \quad (\text{C.1})$$

La vitesse débitante du mélange est quant-à-elle donnée par :

$$U_m = \alpha U_v + (1 - \alpha) U_l$$

En notant ρ la masse volumique du mélange, on montre que :

$$\rho = \sum_{i=1..N} \alpha_i \rho_i$$

En outre on peut montrer que :

$$\sum_{i=1..N} \alpha_i \rho_i U_i = \frac{\dot{m}}{S}$$

On note G la « vitesse massique surfacique », pour alléger les notations, ce groupement revenant souvent :

$$G = \frac{\dot{m}}{S}$$

C.3 Configurations des écoulements diphasiques

Comme mentionné dans l'introduction, un écoulement multiphasique en conduite peut présenter diverses organisations spatiales pour les phases (voir par exemple la Fig. 2 page 4). Ces structures d'écoulement sont appelées « régimes d'écoulement ». Ceux-ci sont définis visuellement, les transitions entre régimes sont de plus graduelles et la classification reste bien souvent subjective. Toutefois, on s'accorde à classer les régimes en trois grands groupes, selon l'homogénéité en temps ou en espace de la répartition spatiale des phases. On distingue ainsi :

1. **Régimes dispersés** : homogènes en r et x , par exemple un écoulement à bulles en conduite verticale (Fig. 2 à gauche) ;
2. **Régimes séparés** : non-homogènes en r , homogènes en x , par exemple un écoulement stratifié en conduite horizontale ou un écoulement annulaire (Fig. 2 à droite) ;
3. **Régimes intermittents** : non homogènes en x et localement non stationnaires, par exemple le régime "slug flow" en conduite verticale (Fig. 2 au milieu).

Au premier ordre, la topologie de l'écoulement va dépendre des paramètres suivants :

- les conditions d'opération (pression, température, apport de chaleur) ;
- les propriétés physiques des phases (densités, viscosités, tension de surface, . . .) ;
- les débits de chaque phase, qui jouent à la fois sur l'inertie et sur la concentration respective de chaque phase ;
- la géométrie et l'orientation de la conduite.

Ainsi, de manière générale, on aura plutôt des écoulements dispersés si une des phases est peu concentrée et que les forces d'inertie sont plus fortes que les effets de flottabilité (nombre de Froude élevé) ou que les effets de tension de surface (nombre de Weber élevé).

Ainsi, dans le cas d'un écoulement d'air et d'eau vertical, co-courant ascendant (Fig. 2), les régimes observés en fonction des vitesses d'air et d'eau sont les suivants :

→ Pour des fortes vitesses d'eau et de faibles vitesses d'air, on se trouve en présence d'écoulements **dispersés à bulles** (en anglais *bubbly flow*). Plus l'écoulement est turbulent et plus ces bulles vont se fragmenter. Dans le cas de l'air et de l'eau aux conditions usuelles, les bulles ont une forme sphérique si leur diamètre est inférieur au millimètre (Ellingsen & Risso, 2001).

→ Pour de plus faibles vitesses d'eau, on observe des écoulements **intermittents**. Tout d'abord, on obtient un écoulement à *poches* (en anglais *slug flow*, c'est-à-dire « écoulement à limaces »). Il s'agit d'un écoulement intermittent constitué de poches d'air allongées, avec un avant arrondi et un arrière plat (que l'on appelle « bulles de Taylor »), entraînant des bulles dans leur sillage. Le film liquide au niveau de la poche de gaz a un mouvement descendant.

→ Lorsque la vitesse de l'eau reste faible et que la vitesse de l'air augmente, les poches d'air vont se fractionner et l'écoulement va être de plus en plus désordonné. Il s'agit en fait d'un écoulement qui tend à devenir annulaire mais où la vitesse de l'air n'est pas assez importante et où le film liquide en paroi retombe périodiquement. On a alors un écoulement *pulsatile*, ou *semi-annulaire* (en anglais *churn flow*).

→ Enfin, pour de grandes vitesses de l'air, le film liquide va être plaqué en paroi, et on aura des écoulements **séparés**. On aura ainsi un écoulement *annulaire* (en anglais *annular flow*), avec éventuellement des goutelettes transportées au cœur de la conduite, ou bien un écoulement à brouillard sans film liquide en paroi dans les cas extrêmes.

En conduite horizontale, le nombre de configurations d'écoulement est plus élevé (voir le bas de la Fig. 2). En effet, la pesanteur, normale à l'axe de la conduite, va avoir tendance à créer

une stratification si les phases ont des densités différentes. En outre, cet effet se fera sentir que ce soit pour des écoulements solides / liquides, liquides / liquides ou gaz / liquides.

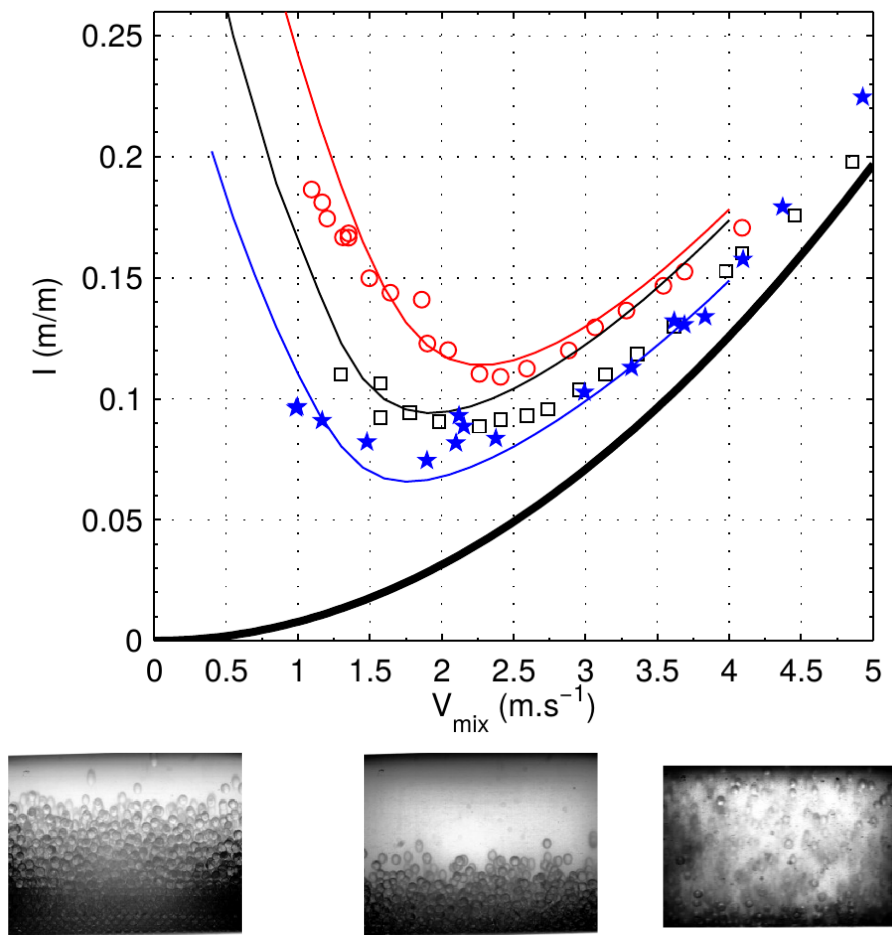


FIGURE 25 – Exemple typique de pertes de charges en écoulement solides / liquide horizontal (Ravelet et al., 2013). Billes de verre de diamètre 5 mm (\star), billes d'alumine de diamètre 6 mm (\circ) et 15 mm (\square), dans une conduite de diamètre 100 mm, à une concentration de transport $\beta = 5\%$. Perte de charge exprimée sous forme de gradient hydraulique, en m de colonne d'eau par m de conduite

La figure 25 présente une courbe typique du gradient hydraulique, qui est la perte de charge régulière en mètre de colonne de fluide porteur par mètre de conduite, en fonction de la vitesse de mélange V_{mix} pour un écoulement d'eau transportant des solides en conduite horizontale. La fraction volumique (ou concentration délivrée ou encore concentration de transport) est constante. Le cas de l'écoulement monophasique est représenté par la ligne continue épaisse. On remarque tout d'abord que la perte de charge est plus élevée qu'en écoulement monophasique : il faut plus de puissance pour déplacer le même débit volumique de matière. En outre, les courbes ne sont pas monotones mais présentent une forme de cuvette avec un minimum local. Des visualisations montrent que les régimes d'écoulement varient avec la vitesse de mélange : à basse vitesse on a un écoulement séparé avec présence d'un lit stationnaire ; à haute vitesse, on va tendre vers un écoulement dispersé pseudo-homogène. Le minimum de la courbe correspond à un changement de régime pour un nombre de Froude unitaire. Un modèle basé sur le bilan

de quantité de mouvement donne les résultats tracés en lignes continues fines. **Toutefois, les corrélations employées dans le modèle** (pour les coefficients de friction notamment) **sont différentes selon les différents régimes d'écoulement attendu.**

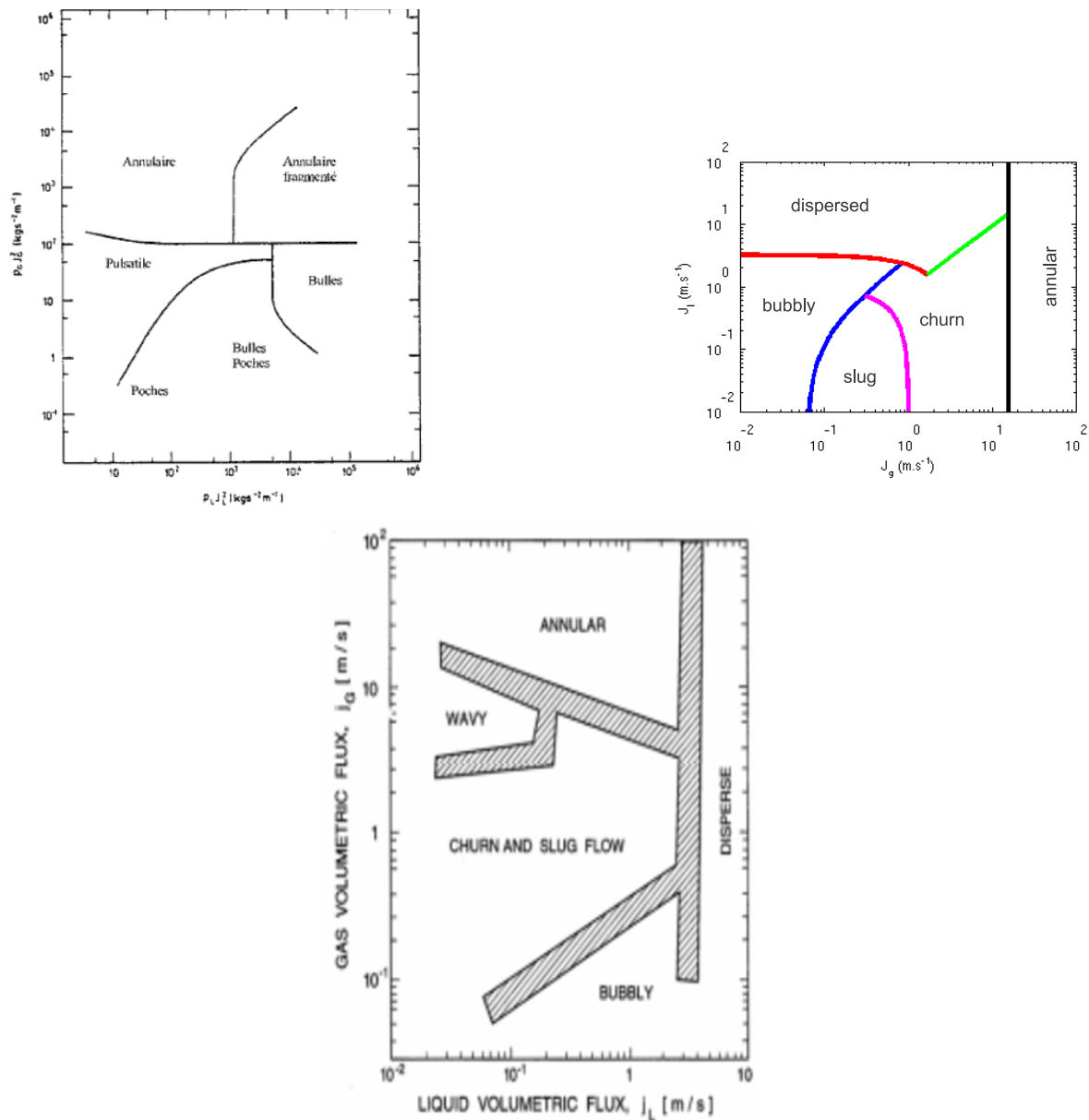


FIGURE 26 – (a) Carte de Hewitt & Roberts (1969) pour écoulements air / eau en conduite de diamètre 31.2 mm pour $P \in [1.4 - 5.4]$ bars. (b) Carte établie par la méthode de Taitel et al. (1980) pour conduite de diamètre $D = 40$ mm, $z_{obs} = 3$ m : *Dispersed bubbles / bubbly*, *Bubbly / slug*, *Dispersed bubbles / churn*, *Slug / churn*, *Churn / dispersed annular*. (c) Carte de Weisman & Kang (1981) pour écoulements air / eau en conduite de diamètre 25 mm.

C.4 Cartes de prédiction des régimes

La prédiction du régime d'écoulement fait le plus souvent appel à des *cartes d'écoulement*. Ces cartes (voir par exemple Fig. 26) sont le plus souvent d'origine empirique, leurs coordonnées

dépendent des auteurs, et les frontières entre régimes sont plus ou moins bien définies. En conclusion, on ne peut faire une confiance aveugle ni aux cartes, ni aux prédictions théoriques.

Pour les écoulements gaz / liquide en conduite horizontale, parmi les nombreuses cartes empiriques, nous présentons celle établie par Mandhane *et al.* (1974) (voir Fig. 27). Cette carte compile plus de 5900 observations. Son domaine de validité est le suivant :

- Diamètre $D \in [13; 165]$ mm ;
- Masse volumique du liquide $\rho_l \in [700; 1000]$ kg.m⁻³ ;
- Masse volumique du gaz $\rho_g \in [0.8; 50]$ kg.m⁻³ ;
- Viscosité dynamique du liquide $\mu_l \in [3 \times 10^{-4}; 9 \times 10^{-2}]$ Pa.s ;
- Viscosité dynamique du gaz $\mu_g \in [1 \times 10^{-5}; 2.2 \times 10^{-5}]$ Pa.s ;
- Tension interfaciale $\sigma \in [25; 100]$ mN.m⁻¹ ;

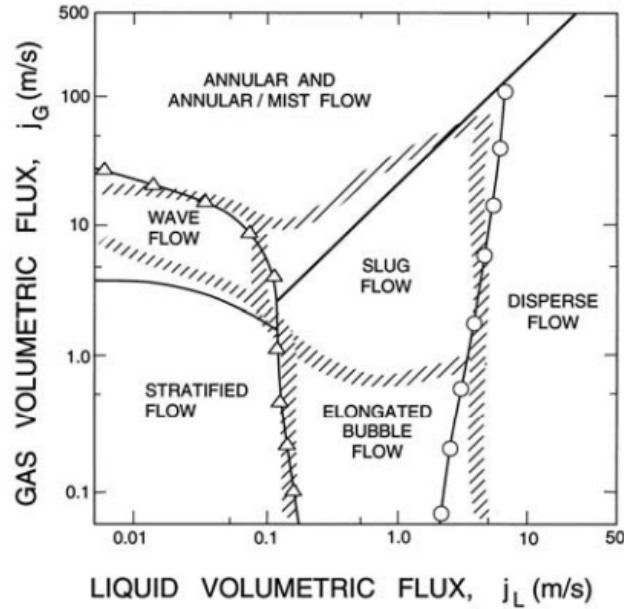


FIGURE 27 – Carte de Mandhane *et al.* (1974) pour un écoulement gaz / liquide en conduite horizontale. Hachures : observations expérimentales, lignes et points : prédictions par la méthode de Taitel & Dukler (1976) pour une conduite de diamètre 25 mm, à 1 bar et 25°C.

C.5 Bilan de masse

- En conduite de section constante et en régime permanent, le bilan de masse simplifié s'écrit :

$$G = \text{cte}$$

C.6 Bilan de quantité de mouvement

- En conduite de section constante et en régime permanent :

$$\frac{d}{dx} [p] = -G^2 \frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1 \dots N} \frac{\xi_i^2}{\alpha_i \rho_i} \right] + \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x - \frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w$$

C.7 Bilan d'énergie

- En conduite de section constante et en régime permanent (sans apport de travail ni source volumique de chaleur) :

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1 \dots N} \xi_i \left(\frac{1}{2} U_i^2 + h_i + gz \right) \right] = \frac{\mathcal{P}}{\dot{m}} \varphi$$

- Pour un changement de phase liquide-vapeur, en supposant l'équilibre thermodynamique, on confond les notions de titre massique ξ et de titre thermodynamique χ . On note $h_{l,v}$ la chaleur latente de vaporisation. En négligeant les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur, on arrive alors à une *équation portant sur le titre* thermodynamique :

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{\varphi \pi D}{\dot{m} h_{l,v}}$$

C.8 Détermination de la fraction volumique

En regardant l'équation du gradient de pression, il appert que les pertes par accélération et d'origine hydrostatique peuvent être calculées directement pour peu que l'on connaisse les fractions volumiques α_i .

Or, cette dernière est un paramètre qu'adopte le système en fonction notamment du type de régime d'écoulement. On va donc chercher à exprimer les fractions volumiques α_i en fonction des propriétés des phases, du débit massique total \dot{m} et des titres massiques ξ_i , ceux-ci étant soit donnés par la thermodynamique (cas d'un changement de phase), soit un paramètre qu'on suppose contrôlé dans le process.

A partir de la notion de glissement (éq. C.1), on peut montrer la relation suivante :

$$\alpha = \frac{\xi \rho_l}{\xi \rho_l + \mathcal{S} (1 - \xi) \rho_v}$$

Dans le cas d'écoulements finement dispersés avec des débits importants, le mélange est bien *homogénéisé* et le glissement est proche de 1. On parle de modèle homogène à l'équilibre lorsqu'on considère $\mathcal{S} = 1$ et donc $U_v = U_l$.

Dans le cas d'un écoulement avec glissement entre phases significatif, il devient nécessaire d'utiliser des modèles ou des corrélations empiriques pour la fraction volumique. La plupart se base sur un modèle ou une corrélation du rapport de glissement (rapport des vitesses moyennes entre phases). Par exemple, la corrélation de Chisholm, 1972 :

$$\mathcal{S} = \sqrt{1 - \xi \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_g}\right)}$$

Une comparaison de différents modèles et corrélations est présentée en Fig. 28 pour le cas de l'eau et de l'air aux conditions usuelles. On pourra trouver une discussion détaillée de leurs mérites et domaines de validité respectifs dans l'article de Woldesemayat & Ghajar (2007). On peut remarquer que le modèle homogène a tendance à surestimer la fraction volumique pour un titre donné, ce qui est effectivement observé dans les écoulements co-courants ascendants d'air et d'eau pas trop dispersés où un glissement significatif existe entre la phase gazeuse plus légère et la phase liquide. La conséquence est que $\alpha_{\text{réel}} \leq \alpha_{\text{homogène}}$.

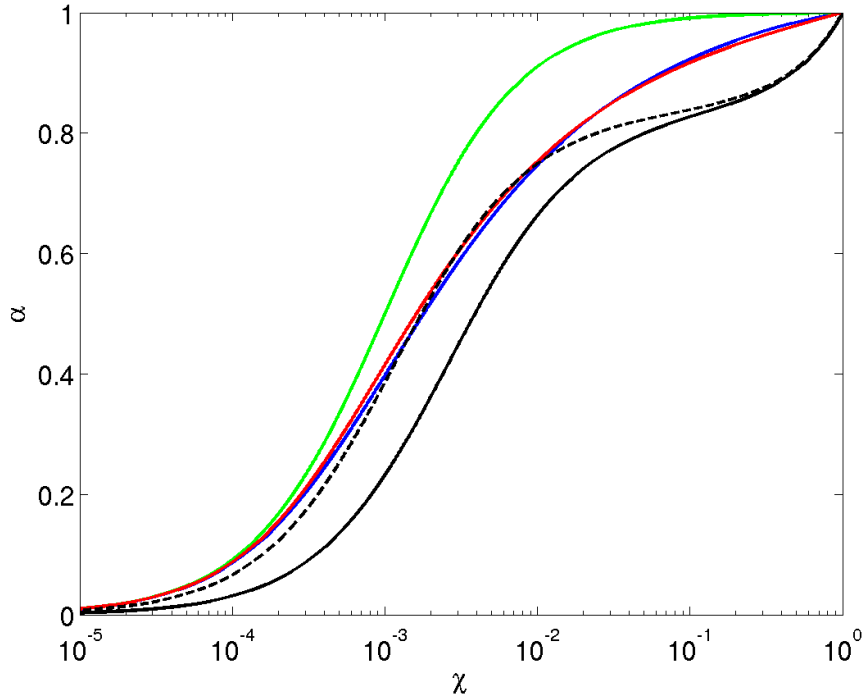


FIGURE 28 – Fraction volumique en fonction du titre massique pour un écoulement diphasique eau / air aux conditions standards de pression et température, selon différents modèles et corrélations. Vert : Modèle homogène, Bleu : Smith 1969, Rouge : Chisholm 1972, Noir : Rouhani & Axelsson 1970 (— : $G = 100 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$, - - : $G = 1000 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$)

C.9 Détermination de la friction

La perte de pression par friction en écoulement multiphasique dépend fortement des régimes d'écoulement. Sa prédiction requiert donc une modélisation ou l'emploi de corrélations empiriques. Le modèle de friction choisi se devra d'être cohérent avec le modèle de fraction volumique.

Friction en modèle homogène

L'idée du modèle homogène est de remplacer l'écoulement diphasique par un pseudo-fluide monophasique. La modélisation la plus simple de la contrainte de cisaillement pariétal consiste donc à utiliser un coefficient de friction C_f pour le fluide de masse volumique ρ du mélange, s'écoulant au débit massique surfacique du mélange G :

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \frac{G^2}{\rho}$$

On doit alors évaluer ce coefficient C_f , en utilisant une corrélation similaire à celles présentées en § 5.5, avec un nombre de Reynolds pour le mélange homogène $Re_h = \frac{GD}{\mu_m}$. Cette viscosité du mélange peut être modélisée de différentes manières, par exemple une moyenne harmonique pondérée par les titres comme proposée par McAdams *et al.* (1942)) :

$$\frac{1}{\mu_h} = \frac{\xi}{\mu_g} + \frac{1 - \xi}{\mu_l}$$

Bien que le modèle homogène puisse donner de bons résultats lorsque le rapport de glissement

est proche de 1 (hautes pressions en gaz / liquide ou grands débits massiques), il n'est en général pas applicable dans la majorité des situations. On utilisera alors un multiplicateur de friction et une corrélation pour celui-ci.

Autres modèles de friction pour écoulements diphasiques

On introduit la notion de « multiplicateur » pour la modélisation de la friction en écoulement diphasique. L'idée est de considérer le gradient de pression dû à la friction pour l'écoulement diphasique comme proportionnel au gradient de pression que l'on obtiendrait en monophasique pour une des phases, généralement la plus concentrée L . Il existe deux variantes principales :

- Soit on considère le gradient de pression en monophasique que l'on observerait avec un débit massique surfacique G_L . Le coefficient de proportionnalité est alors noté Φ_L^2 :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{diph}(G, \xi) = \Phi_L^2(\xi) \times \left(\frac{dp}{dx}\right)_L(G_L)$$

- Soit on considère le gradient de pression en monophasique que l'on observerait avec un débit massique surfacique G . Le coefficient de proportionnalité est alors noté Φ_{LO}^2 :

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{diph}(G, \chi) = \Phi_{LO}^2(\chi) \times \left(\frac{dp}{dx}\right)_L(G)$$

On emploiera ensuite un modèle ou une corrélation pour ce terme multiplicateur. Le modèle le plus simple est de considérer que le coefficient de friction est identique en diphasique et en monophasique. Dans ce cas, Φ_{LO}^2 a une expression très simple en fonction de la densité du mélange diphasique :

$$\Phi_{LO}^2 = \frac{\rho_L}{\rho}$$

Un modèle plus complexe consiste à considérer également une variation du coefficient de friction pour le mélange. Par exemple, avec le modèle homogène ("Slip ratio" $\mathcal{S} = 1$) pour la densité du mélange, la corrélation de Blasius pour le coefficient de friction, et la corrélation de McAdams *et al.* (1942) pour la viscosité du mélange, on obtient l'expression suivante :

$$\Phi_{LO}^2 = \left[1 + \xi \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_g}\right] \left[1 + \xi \frac{\mu_l - \mu_g}{\mu_g}\right]^{-0.25}$$

Méthode de Lockhart & Martinelli

Lockhart & Martinelli (1949) ont développé une corrélation pour Φ_L^2 , en utilisant de l'air et de l'eau, en écoulement adiabatique, à basse pression ($P \in [1 - 3.6]$ bars), en tubes horizontaux lisses de diamètres $D < 25$ mm. Cette corrélation est également utilisée dans d'autres cas, et étendue à d'autres corps (Zhang *et al.*, 2010).

Dans la formulation originale, on utilise les notations suivantes, pour du gaz / liquide avec titres mesurés par rapport au gaz :

- Expérience n°1 : en écoulement diphasique pour un débit massique $M = M_l + M_g$, mesure du gradient de pression $dp/dx_{(F)}$;
- Expérience n°2 : gaz seul au même M_g , mesure de $dp/dx_{(FG)}$;
- Expérience n°3 : liquide seul au même M_l , mesure de $dp/dx_{(FL)}$.

Liquide	Gaz	C
turbulent	turbulent	20 – 21
laminaire	turbulent	10 – 12
turbulent	laminaire	8 – 10
laminaire	laminaire	5

TABLE C.1 – Constante C de la corrélation de Lockart & Martinelli en fonction du régime d'écoulement

On introduit alors le « paramètre de Lockart & Martinelli » :

$$X^2 = \frac{dp/dx_{(FL)}}{dp/dx_{(FG)}}$$

Ce paramètre est en fait égal au rapport des multiplicateurs de friction définis en page 67 :

$$X^2 = \frac{\Phi_G^2}{\Phi_L^2}$$

Les données sont présentées sous forme graphique par Lockhart & Martinelli (1949). Une corrélation pour le multiplicateur de friction a été établie ensuite (Chisholm, 1967) :

$$\Phi_L^2 = \frac{dp/dx_{(F)}}{dp/dx_{(FL)}} = 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2}$$

La constante C dépend du régime d'écoulement (laminaire ou turbulent) de chacune des deux expériences monophasiques. Les valeurs communément admises sont rapportées au Tab. C.1

Ce modèle est complété par une corrélation pour la fraction volumique afin d'exprimer les termes de perte de pression hydrostatique et d'accélération de manière cohérente avec le terme de frottement :

$$\alpha = 1 - \left(1 + CX + X^2\right)^{-1/2}$$

Compléments

- Dans le cas de tuyaux rugueux, *i.e.* lorsque les coefficients de frottement ne dépendent plus du nombre de Reynolds ($n = 0$), Chisholm (1973) propose la forme suivante pour la constante C , avec \mathcal{S} le “slip ratio” :

$$C = \frac{1}{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{\rho_L}{\rho_G}} + \mathcal{S} \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L}}$$

- On pourra trouver dans la littérature un ensemble d'autres corrélations pour le multiplicateur de friction. Beaucoup d'entre elles sont dérivées de la corrélation de Lockhart & Martinelli ou utilisent le paramètre X^2 . Des exemples d'application peuvent être trouvés dans les articles de Zhang *et al.* (2010) et Zhao & Bi (2001) (voir également la Fig. 29).

Signalons enfin que ces corrélations ne sont bien souvent précises qu'à $\pm 25\%$ près.

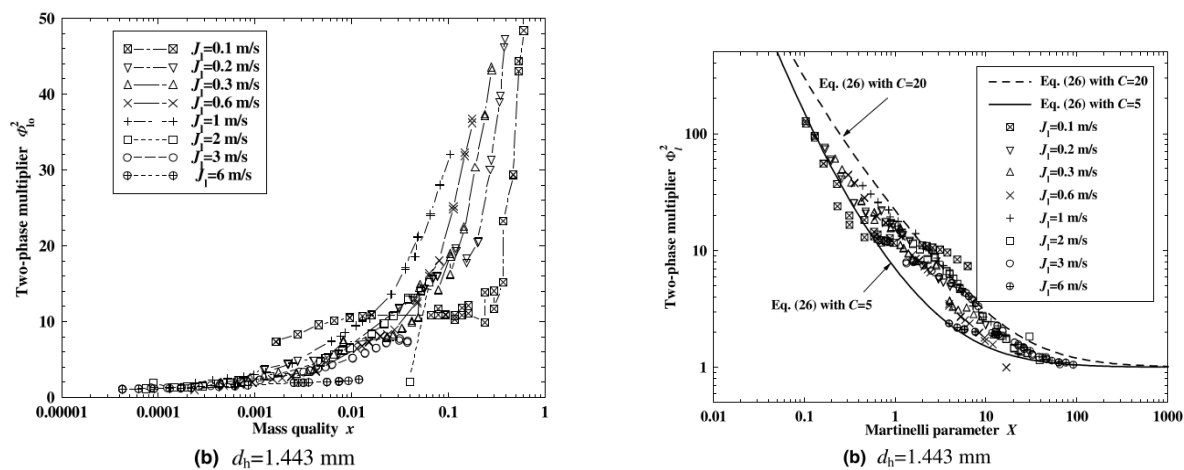


FIGURE 29 – Multiplicateur de friction en fonction du titre massique et du paramètre de Martinelli, pour un écoulement vertical d'air et d'eau aux conditions standards en tube triangulaire de diamètre hydraulique 1.4 mm. Figure extraite de Zhao & Bi (2001).

Bibliographie

Bibliographie

- BALIAN, R. (2003). *Introduction à la thermodynamique hors-équilibre*. <http://e2phy.in2p3.fr/2003/actesBalian.pdf>.
- BORGHI, R. & ANSELMET, F. (2014). *Modélisation des écoulements multiphasiques turbulents hors d'équilibre*. Lavoisier.
- CHISHOLM, D. (1967). *A theoretical basis for the Lockhart-Martinelli correlation for two-phase flow*. Int. J. Heat Mass Transfer, **10**, 1767.
- CLAUDEL, B. (1996). *Propriétés thermodynamiques des fluides*. Techniques de l'Ingénieur, B8020.
- DELHAYE, J.-M. (2008). *Thermohydraulique des réacteurs*. EDP Sciences.
- ELLINGSEN, K. & RISSO, F. (2001). *On the rise of an ellipsoidal bubble in water : oscillatory paths and liquid-induced velocity*. Journal of Fluid Mechanics, **440**, 235.
- GARRIGUES, J. (2016). *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*.
- INCROPERA, F. P., DEWITT, D. P., BERGMAN, T. L. & LAVINE, A. S. (2007). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley.
- KUSAKABE, M., TANYILEKE, G. Z., MCCORD, S. A. & SCHLADOW, S. G. (????). *Recent pH and CO₂ profiles at Lakes Nyos and Monoun, Cameroon : implications for the degassing strategy and its numerical simulation*. J. Volcanology and Geothermal Research, **97**, 241.
- LALLEMAND, A. (2015). *Écoulement des fluides — Equations de bilans*. Techniques de l'Ingénieur, BE8153.
- LALLEMAND, M. (2006). *Transferts en changement de phase - Ebullition convective*. Techniques de l'Ingénieur, BE8236.
- LE TALLEC, P. (2009). *Modélisation et calcul des milieux continus*. Editions de l'Ecole Polytechnique. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00542313>.
- LOCKHART, R. W. & MARTINELLI, R. C. (1949). *Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two component flow in pipes*. Chem. Engng. Prog., **45**, 39.
- MANDHANE, J. M., GREGORY, G. A. & AZIZ, K. (1974). *A flow pattern map for gas—liquid flow in horizontal pipes*. International Journal of Multiphase Flow, **1**, 537.
- MCADAMS, W. H., WOODS, W. K. & BRYAN, R. L. (1942). *Vaporization inside horizontal tubes - II - Benzene- Oil Mixtures*. Trans. ASME, **64**, 193.
- PADET, J. (2017a). *Convection thermique et massique - Principes généraux*. Techniques de l'Ingénieur, BE8205.
- PADET, J. (2017b). *Convection thermique et massique - Nombre de Nusselt : partie 1*. Techniques de l'Ingénieur, BE8206.
- PADET, J. (2017c). *Convection thermique et massique - Nombre de Nusselt : partie 2*. Techniques de l'Ingénieur, BE8207.

- PLANCK, M. (1963). *L'image du monde dans la physique moderne*. Gonthier.
- RAVELET, F., BAKIR, F., KHELLADI, S. & REY, R. (2013). *Experimental study of hydraulic transport of large particles in horizontal pipes*. *Experimental Thermal and Fluid Science*, **45**, 187.
- SCHMID, M., LORKE, A., WUEST, A., HALBWACHS, M. & TANYILEKE, G. (2003). *Development and sensitivity analysis of a model for assessing stratification and safety of Lake Nyos during artificial degassing*. *Ocean Dynamics*, **53**, 288.
- TAITEL, Y. & DUKLER, A. E. (1976). *A Model for Predicting Flow Regime Transitions in Horizontal and near Horizontal Gas-Liquid Flow*. *AIChE Journal*, **22**, 47.
- TAITEL, Y., BARNEA, D. & DUKLER, A. E. (1980). *Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes*. *AIChE Journal*, **26**, 345.
- WEISMAN, J. & KANG, S. Y. (1981). *Flow pattern transitions in vertical and upwardly inclined lines*. *International Journal of Multiphase Flow*, **7**, 271.
- WOLDESEMAYAT, M. A. & GHAJAR, A. J. (2007). *Comparison of void fraction correlations for different flow patterns in horizontal and upward inclined pipes*. *International Journal of Multiphase Flow*, **33**, 347.
- ZHANG, W., HIBIKI, T. & MISHIMA, K. (2010). *Correlations of two-phase frictional pressure drop and void fraction in mini-channel*. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **53**, 453 .
- ZHAO, T. S. & BI, Q. C. (2001). *Pressure drop characteristics of gas-liquid two-phase flow in vertical miniature triangular channels*. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **44**, 2523.