

# Modélisation thermohydraulique des écoulements internes

Florent Ravelet<sup>1</sup>

Laboratoire d'Ingénierie des Fluides et des Systèmes Énergétiques

<sup>1</sup>Arts et Métiers - Sciences et Technologies

13 avril 2021



LIFSE





# Introduction



## Objectif général

Modèles 0D/1D de circuits fluides incluant des éléments où se produisent des échanges de chaleur et de travail avec le milieu extérieur.

Dans le but de déterminer :

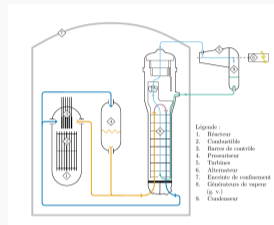
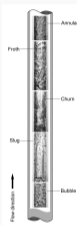
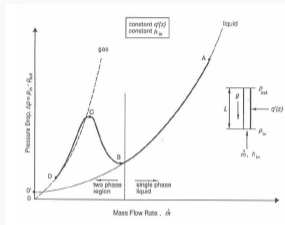
- des grandeurs caractérisant l'écoulement (débits, fractions volumiques)
- des grandeurs caractérisant l'état thermodynamique des fluides (températures, pressions, titres thermodynamiques)
- les travaux et chaleurs échangés dans les différents éléments du circuit.

Au moyen de :

- Bilans de masse, quantité de mouvement, énergie
- Tables thermodynamiques, lois d'état, ...
- Corrélations de friction, transferts thermiques, ...



## Exemples



- Thermosiphon diphasique, Vaporisation en tube chauffant, Centrale nucléaire.
- Carrefour de plusieurs disciplines : mécanique des fluides, transferts thermiques, thermodynamique avec changement de phase.
- Problème « complet » = 3D, instationnaire  $\Rightarrow$  information coûteuse à obtenir, lourde à traiter.
- Données « pertinentes » = débits, titre thermodynamique, puissances = quantités moyennes intégrales  $\Rightarrow$  Modèles 0D - 1D, quasi-stationnaires.



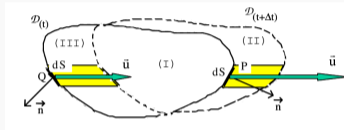
# Bilans dans un volume de contrôle fixe

# Bilans dans un volume de contrôle : deux approches



## Volume de contrôle *matériel* $\mathcal{D}(t)$

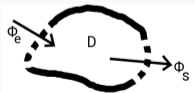
- Constitué à chaque instant des mêmes particules.



- Le système matériel se déplace à la vitesse du fluide  $\vec{u}(\vec{x}, t)$

## Volume de contrôle *géométrique* (fixe) $\mathcal{V}$

- Fixe dans l'espace.



- Flux entrants et sortants par les frontières, liés à un écoulement.

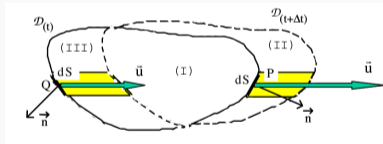


## 1) Bilans dans un volume de contrôle matériel

- Soit  $\mathcal{G}(t)$  une grandeur macroscopique définie sur un système **matériel**  $\mathcal{D}(t)$ . On note  $g(\vec{x}, t)$  la grandeur volumique associée :

$$\mathcal{G}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} g(\vec{x}, t) dv$$

- Théorème de transport de Reynolds (démonstration dans le polycopié)

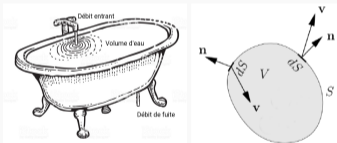


$$\frac{d}{dt} \mathcal{G}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial g}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}(t)} g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$



## 2) Bilans dans un volume de contrôle fixe traversé par un écoulement :

- On considère, dans un premier temps :
  - Volume fixe  $\mathcal{V}$  avec fluide traversant sa frontière.
  - Pas de sources.
- Exemple de la baignoire :  $\frac{d}{dt} \text{Volume} = \text{flux volume entrant} - \text{flux volume sortant}$



$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} g dv = - \int_{\partial \mathcal{V}} g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$





## 2) Bilans dans un volume de contrôle fixe traversé par un écoulement :

- On peut rajouter des sources de production ou destruction de la grandeur  $g$  dans le volume :
- Exemple d'un pays :  
 $\frac{d}{dt}$  Population = flux migratoire entrant - flux migratoire sortant + taux de naissance - taux de décès



- Bilan généralisé pour la grandeur  $\mathcal{G}(t)$  associée au volume de contrôle fixe :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} g dv}_{\text{Variation de } \mathcal{G}} = - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{V}} g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds}_{\text{Flux net de } g} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} P_g dv}_{\text{Sources en volume de } g} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{V}} \Phi_g \cdot \vec{n} ds}_{\text{Sources surfaciques de } g}$$



## Trois lois de conservation fondamentales pour un système *matériel*

- Masse  $\mathcal{M}$  : en l'absence de réaction nucléaires ou chimiques, la masse se conserve :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M} = 0$$

- Quantité de mouvement  $\vec{P}$  : principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \Sigma\vec{F}_{ext}$$

- Energie interne  $\mathcal{E}$  + énergie cinétique macroscopique  $E_k$  : premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E} + E_k) = \dot{W}_{ext} + \dot{Q}_{ext}$$

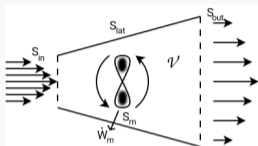


## Pour un fluide :

$\mathcal{G}(t)$	$g(\vec{x}, t)$	Sources volume $P_g$	Sources surfaciques $\Phi_g$
$\mathcal{M}$ masse	$\rho$ masse volumique	0	0
$\vec{P}$ quantité de mouvement	$\rho \vec{u}$	$\rho \vec{g}$ pesanteur	$\vec{\sigma} = -p\mathbb{I} + \vec{\sigma}_v$ tenseur des contraintes
$\mathcal{E} + E_k$ énergie interne + énergie cinétique	$\rho \left( e + \frac{1}{2} u^2 \right)$	$\rho \vec{g} \cdot \vec{u} + r$ puissance forces + rayonnement	$\vec{\sigma} \cdot \vec{u} - \vec{q}$ puissance forces + flux de chaleur



## Application à un composant de circuit fluide :



- Volume de contrôle avec entrées, sorties, parois fixes, machines ;
- Décomposition des termes surfaciques, pesanteur dérive d'un potentiel <sup>1</sup>
- $\Rightarrow$  bilan enthalpique (stationnaire) :

$$\int_{S_{in}+S_{out}} \left( h + \frac{1}{2}u^2 + gz \right) (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \dot{W}_m + \dot{Q}_{ext} \quad (1)$$

- $h = e + \frac{p}{\rho}$  enthalpie massique,  $\dot{W}_m$  puissance mécanique *technique* <sup>2</sup>

1.  $\vec{g} = -\vec{\nabla}gz$  avec  $z$  l'altitude

2. Puissance mécanique échangée avec l'extérieur ayant pour origine les forces exercées sur le fluide par des surfaces mobiles à l'intérieur du domaine



## Energie mécanique :

- On prend le bilan de quantité de mouvement ;
- On fait le produit scalaire avec  $\vec{u}$  ;
- $\Rightarrow$  Théorème de l'énergie cinétique.
- En version stationnaire :

$$\int_{S_{in}+S_{out}} \underbrace{\left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + gz \right)}_{\text{énergie mécanique}} (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) \, ds = \underbrace{\dot{W}_m}_{\text{puissance technique}} + \underbrace{\dot{W}_{comp} - \dot{W}_{mech \, loss}}_{\text{puissance efforts intérieurs}} \quad (2)$$

- Puissance des efforts intérieurs, somme de deux termes

$$\begin{aligned} \dot{W}_{comp} &= \int_{\mathcal{V}} p \operatorname{div}(\vec{u}) \, dv \\ \dot{W}_{mech \, loss} &= \int_{\mathcal{V}} (\vec{\sigma}_v : \vec{\nabla} \vec{u}) \, dv \end{aligned}$$

- Dissipation d'énergie mécanique d'origine visqueuse ( $\dot{W}_{mech \, loss} \geq 0$ ).



## Energie interne :

- On prend le bilan d'énergie totale (Eq. 1);
- On prend le bilan d'énergie mécanique (Eq. 2);
- La différence (Eq. 1)–(Eq. 2)  $\Rightarrow$  bilan d'énergie interne (Eq. 3).
- En version stationnaire :

$$\int_{S_{in}+S_{out}} e (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \dot{Q}_{ext} - \dot{W}_{comp} + \dot{W}_{mech\ loss} \quad (3)$$

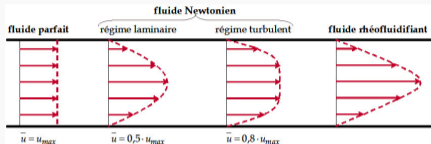
- La dissipation d'énergie mécanique agit comme source d'énergie interne.



## Bilans 0D (entrée-sortie)



## Approximation de l'écoulement quasi-uniforme



- On intègre sur des surfaces d'entrée ou de sortie. Problème :  $\vec{u}(\vec{x})$  pas uniforme.
- En régime permanent le débit massique se conserve :

$$\dot{m}_{in} = \dot{m}_{out} = \dot{m}$$

- On utilise des vitesses moyennes débitantes  $U_{out}$  et  $U_{in}$  telles que :

$$\dot{m} = \rho_{in} S_{in} U_{in} = \rho_{out} S_{out} U_{out}$$

- De même, on a des pressions moyennes, altitudes moyennes et enthalpies moyennes dans les sections.





## Bilan enthalpique dans l'approximation de l'écoulement quasi-uniforme, régime permanent

- Dans ce qui suit,  $\Delta$  correspond à « sortie – entrée »
- Bilan enthalpique

$$\dot{m}\Delta \left( h + \alpha \frac{U^2}{2} + gz \right) = \dot{W}_m + \dot{Q}_{ext}$$

- $\alpha$  est un facteur de correction pour le flux d'énergie :

$$\alpha \frac{U^2}{2} = \frac{\int \frac{1}{2} u^2 (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds}{\rho S U}$$

- En laminaire, écoulement développé en section circulaire (Poiseuille) :  $\alpha = 2$
- En écoulement turbulent développé :  $\alpha \simeq 1.05$
- En fluide parfait on prend  $\alpha = 1$  (profil uniforme)



## Bilan d'énergie mécanique dans l'approximation de l'écoulement quasi-uniforme, régime permanent, écoulement incompressible

- Bernoulli généralisé :

$$\dot{m}\Delta \left( \frac{p}{\rho} + \alpha \frac{U^2}{2} + gz \right) = \dot{W}_m - \dot{W}_{mech\ loss}$$

- Charge hydraulique :

$$\mathcal{H}_l = \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} + z$$

- Pertes de charge :

$$\delta \mathcal{H}_l = \frac{1}{g} \frac{\dot{W}_{mech\ loss}}{\dot{m}}$$

- Coefficient de perte de charge :

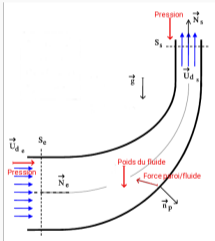
$$\delta \mathcal{H}_l = \kappa \frac{U^2}{2g}$$

- Bilan d'énergie interne :

$$\dot{m}\Delta (e) = \dot{Q}_{ext} + \dot{W}_{mech\ loss}$$



## Bilan de quantité de mouvement dans l'approximation de l'écoulement quasi-uniforme, régime permanent, écoulement incompressible



- Théorème des quantités de mouvement :

$$\Delta \left\{ (\dot{m}\beta U + pS) \vec{N} \right\} = \mathcal{M}\vec{g} + \vec{F}_{p \rightarrow f}$$

- $\beta$  facteur de correction pour le flux de q.d.m :

$$\beta U = \frac{\int \vec{u} \cdot \vec{n} (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) ds}{\rho S U}$$

- Poiseuille :  $\beta = 4/3$
- Turbulent :  $\beta \simeq 1.01$



## Facteur de correction pour l'énergie cinétique

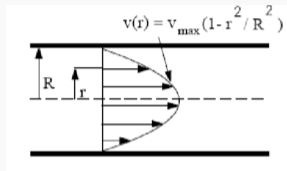


FIGURE – Profil de vitesse en écoulement laminaire développé dans un tube de section circulaire

Pour l'écoulement dans un tube, l'énergie cinétique par unité de masse moyenne sur une section n'est pas  $U^2/2$ , car le carré d'une somme n'est pas égal à la somme des carrés. C'est pourquoi on introduit un facteur de correction  $\alpha$  tel que :

$$\int_S \left( \frac{1}{2} u^2 \right) (\rho \vec{u} \cdot \vec{n}) \, ds = \dot{m} \alpha \frac{U^2}{2}$$

Montrer que pour un écoulement incompressible laminaire développé dans un tube de section circulaire (voir Fig. 1)  $\alpha = 2$ .

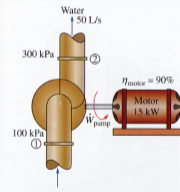


## Calcul du débit dans le circuit primaire d'un réacteur nucléaire

Connaissant la puissance thermique dégagée dans le cœur du réacteur d'une centrale à eau sous pression du palier 900 MWe,  $Q = 2785$  MW, et les températures froides  $T_f = 284^\circ\text{C}$  et chaudes  $T_c = 322^\circ\text{C}$  en entrée et sortie du réacteur, calculer le débit massique dans la totalité du circuit primaire.

D'après le NIST, à 155 bars et  $284^\circ\text{C}$ ,  $c_p = 5.139$  kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et  $h = 1253.3$  kJ.kg<sup>-1</sup> et à 155 bars et  $322^\circ\text{C}$ ,  $c_p = 6.240$  kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et  $h = 1465.4$  kJ.kg<sup>-1</sup>.

## Echauffement de l'eau dans une pompe



Une pompe est alimentée avec un moteur électrique de 15 kW dont le rendement est de 90%. Elle véhicule un débit d'eau ( $\rho = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>) de 50 L.s<sup>-1</sup> et élève sa pression de 100 kPa à 300 kPa (voir Fig. 2. Calculer le rendement hydraulique de la pompe et l'élévation de température de l'eau (prendre  $c_v = 4.18$  kJ.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>, il y a également quelques hypothèses à effectuer et à justifier).

FIGURE – Données pour le fonctionnement de la pompe



## Perte de charge dans un élargissement brusque

Deux conduites cylindriques de diamètres  $D_1$  et  $D_2$  telles que  $D_2 > D_1$ . L'écoulement se sépare sur le raccordement : formation d'une zone de recirculation avec des tourbillons (voir Fig. 3). On va montrer ici que, même en négligeant les frottements sur les parois, cette singularité induit une dissipation d'énergie mécanique (qui trouve son origine dans l'écoulement tourbillonnaire), que l'on exprimera sous forme de « perte de charge hydraulique ».

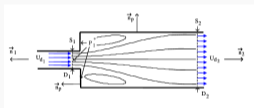


FIGURE – Schéma de l'élargissement brusque

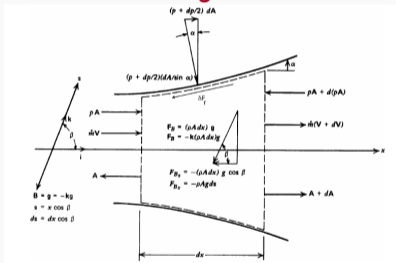
1. Ecrire le bilan de masse dans le volume de contrôle limité par les surfaces d'entrée  $S_1$ , de sortie  $S_2$  et les surfaces solides des tubes compris entre l'entrée et la sortie.
2. Ecrire le bilan de quantité de mouvement projetée dans la direction axiale dans ce même volume de contrôle.
3. Ecrire le bilan d'énergie mécanique dans ce même volume de contrôle en faisant intervenir l'énergie massique dissipée par les efforts internes sous forme d'un terme inconnu  $e_{mech\ loss}$ .
4. L'exprimer en fonction de  $S_1$ ,  $S_2$  et  $U_{d1}$ .
5. Proposer un coefficient de perte de charge singulière  $\kappa$  et donner son expression en fonction de  $S_1$  et  $S_2$ .



# Bilans 1D (E.D.O)



## Dicrétisation le long d'une conduite de section lentement variable



- Dans le cas d'évolutions des paramètres le long de l'écoulement (exemple : conduite chauffée, dégazage par effet hydrostatique...) :
- On discrétise en une succession de petits volumes élémentaires de longueur  $dx$  le long de l'axe de la conduite (axe  $x$  par exemple)
- En faisant  $dx \rightarrow 0$ , on obtient des équations aux dérivées partielles (ordinaires en stationnaire : E.D.O).





## En régime permanent, sans singularité, approximation uniforme

- Bilan de masse :

$$\frac{d}{dx} (\rho S U) = \frac{d}{dx} \dot{m} = 0$$

- Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{dp}{dx} = \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x - \rho U \frac{d}{dx} (U) - \frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w$$

- Bilan d'énergie :

$$\frac{d}{dx} \left( \rho \left( \frac{1}{2} U^2 + h + gz \right) U \right) = \frac{\mathcal{P}}{S} \varphi$$

- Masse volumique  $\rho$
- Vitesse débitante  $U$
- Pression  $p$
- débit massique  $\dot{m}$
- Conduite de section  $S$
- Périmètre mouillé  $\mathcal{P}$
- Contrainte de cisaillement en paroi  $\tau_w$
- Densité de flux de chaleur en paroi  $\varphi$



## Gradient de pression

- Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{dp}{dx} = \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x - \rho U \frac{d}{dx} (U) - \frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w$$

- Gradient de pression : hydrostatique + accélération + friction
- Vérifier les signes
- Accélération si  $\rho$  variable ou  $S$  variable
- Friction due aux contraintes de cisaillement en paroi : lien avec *pertes de charge régulières*



Modèle de friction :

$$\tau_w = C_f(Re) \frac{1}{2} \rho U^2$$

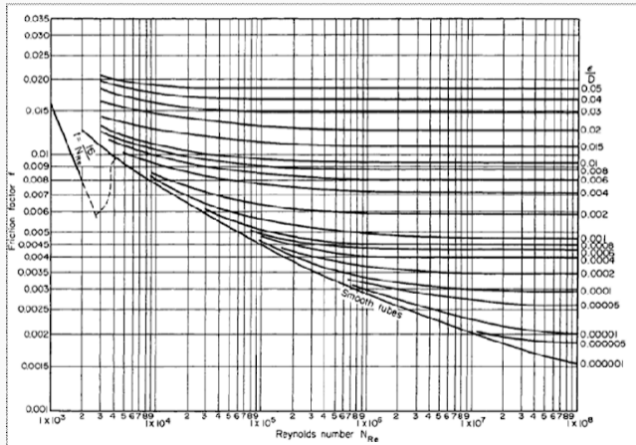


FIGURE – Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds pour un écoulement en tuyau de section constante



# Écoulements multiphasiques



## Exemple : convection forcée en écoulement vertical

- Écoulement liquide en bas de la colonne, apport de chaleur constant à la paroi. De bas en haut :
  - Température de paroi augmente jusqu'à température de saturation.
  - Ebullition nucléée : régime à bulles.
  - Coalescence des bulles : régime à poches/ bouchons.
  - Écoulement annulaire.
  - Assèchement en paroi, gouttelettes en suspension (brouillard).
  - Vapeur sèche.
- L'enthalpie augmente : pour  $h_{l,sat}(p) \leq h \leq h_{v,sat}(p)$  : mélange liquide vapeur.
- Titre thermodynamique
 
$$\chi = \frac{h - h_{l,sat}}{h_{v,sat} - h_{l,sat}}$$
- Débit masse total :  $\dot{m}_l + \dot{m}_v = \dot{m}$
- Comment s'écoulent les phases? Quelle répartition spatiale? Quelles « pertes de charge »?

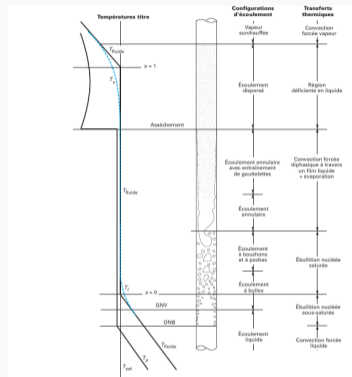


FIGURE – Configurations d'écoulement et régimes de transferts thermiques dans un tube vertical chauffé



## Principales configurations d'écoulement liquide/gaz

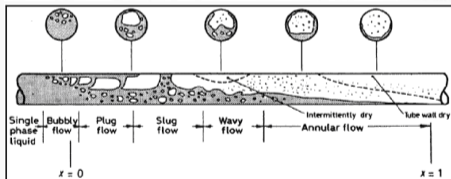


FIGURE – En haut : photographies d'un écoulement co-courant ascendant liquide / gaz pour différents débits de gaz et de liquide. De gauche à droite le débit de gaz augmente : écoulement à bulles dispersées, à bulles agglomérées, à poches, pulsatile et annulaire dispersé. En bas : écoulement horizontal chauffé à la paroi;  $x$  est le titre en vapeur, l'écoulement se fait de gauche à droite

- Régimes dispersés
- Régimes séparés
- Régimes intermittents

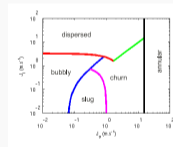


FIGURE – Cartes de régime pour écoulements air / eau en conduite verticale



## Modèle à deux fluides, version simplifiée, régime permanent

- Soient deux phases notées 1 et 2 s'écoulant dans une conduite de section  $S$ .
- Le débit massique de chaque phase est  $\dot{m}_i$ .
- Soit  $S_i$  la fraction de conduite occupée par la phase  $i$ . On appelle  $\alpha_i = \frac{S_i}{S}$  la fraction volumique.
- On note  $U_i$  la vitesse débitante de chaque phase.
- Equations de bilan (avec hypothèse d'écoulement uniforme) :

- Bilan de masse :

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_i \rho_i \alpha_i U_i \right) = 0$$

- Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{dp}{dx} = \sum_i \alpha_i \rho_i \vec{g} \cdot \vec{e}_x - \frac{d}{dx} \left( \sum_i \alpha_i \rho_i U_i^2 \right) - \frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w$$

- Bilan d'énergie :

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_i \alpha_i \rho_i \left( \frac{1}{2} U_i^2 + h_i + gz \right) U_i \right) = \frac{\mathcal{P}}{S} \varphi$$



## Modèle homogène équilibré (écoulements dispersés liquide/vapeur)

- On suppose que les phases ont la même vitesse moyenne (pas de glissement entre phases, hypothèse d'équilibre mécanique) :  $U_l = U_v = U$
- On suppose qu'on est à l'équilibre thermodynamique :  $h_l = h_{l,sat}(p)$  et  $h_v = h_{v,sat}(p)$
- On a alors :  $\chi = \frac{h - h_{l,sat}}{h_{v,sat} - h_{l,sat}}$

- Masse volumique du mélange :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\chi}{\rho_v} + \frac{1 - \chi}{\rho_l}$$

- Equations de bilan :

- Bilan de masse :

$$\frac{d}{dx} (\rho S U) = 0$$

- Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{dp}{dx} = \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x - \rho U \frac{d}{dx} (U) - \frac{\mathcal{P}}{S} \tau_w$$

- Bilan d'énergie :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} U^2 + h + gz \right) = \frac{\mathcal{P}}{\dot{m}} \varphi$$





## Modèles de fraction volumique et de pertes de charge

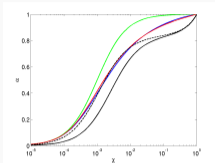


FIGURE – Fraction volumique en fonction du titre massique pour un écoulement diphasique eau / air aux conditions standards de pression et température, selon différents modèles et corrélations.

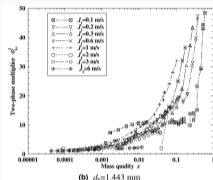
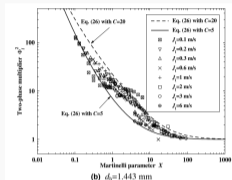


FIGURE – Multiplicateur de friction en fonction du titre massique et du paramètre de Martinelli, pour un écoulement vertical d'air et d'eau aux conditions standards en tube triangulaire de diamètre hydraulique 1.4 mm.

- Modèle homogène équilibré :  $\alpha = \frac{\xi \rho_l}{\xi \rho_l + (1-\xi) \rho_v}$ . Étendu par modèles de glissement entre phases, ou corrélations empiriques...
- Modèle homogène : coefficient de friction d'un fluide avec viscosité de mélange et densité de mélange. Étendu par des modèles de facteur de multiplication du frottement et des corrélations empiriques.
- Voir annexes du polycopié.
- Précision de  $\pm 15\%$