CorrigeExam2021

March 24, 2021

1 Calcul de la constante de Henry

Attention, ici la loi est donnée en version fraction massique. Comme on ne considère qu'un gaz dissous, sa pression partielle est égale à la pression du liquide.

[1]:
```
mco2=33.3e-3 #kg
mh2o=1 #kg
P=20e5 #Pa
rhol=1e3 #kg/m3
g=9.81 #m/s2
h=200 #m
P2=1e5 # Pa
y1=14e-3
D=140e-3 #m
rhog=1.8 #kg/m3
```

A 20 bars, on peut dissoudre au maximum 33.3 g de CO_2 par kg d'eau. Ceci correspond à une fraction massique $y_s(20\,\text{bars})$ égale au rapport entre la masse de CO_2 et la masse du mélange:

$$y_s = \frac{33.3}{1000 + 33.3}$$

[2]:
```
ys=mco2/(mco2+mh2o)
print(f"ys={ys:.3f}")
```

```
ys=0.032
```

Loi de Henry

$$P = Hy_s$$

[3]:
```
Ha=P/ys
print(f"H={Ha/1e5:.1f} bars")
```

```
H=620.6 bars
```

La réponse suivante a aussi été acceptée, considérant qu'on pouvait avoir 33.3 g de CO_2 par kg de mélange:

[4]:
```
ys2=mco2/(mh2o)
print(f"ys={ys2:.3f}")
```

```
Hb=P/ys2
print(f"H={Hb/1e5:.1f} bars")
```

```
ys=0.033
H=600.6 bars
```

On applique la loi de l'hydrostatique pour avoir la pression au fond du lac:

$$P_{fond} = P_2 + \rho g h$$

[5]:
```
Pfond=P2+rhol*g*h
print(f"Pfond={Pfond/1e5:.2f} bars")
```

```
Pfond=20.62 bars
```

On peut donc dissoudre (un peu plus que) 33.3 g de CO_2 par kg d'eau au fond du lac. Or, au fond du lac, on a une fraction massique de CO_2 dissous égale à $y_1 = 14 \times 10^{-3}$. Donc le liquide au fond du lac est sous-saturé en CO_2

La pression de saturation correspondant à cette fraction massique est: (deux réponses selon la valeur retenue pour H)

[6]:
```
Ps1a=Ha*y1
Ps1b=Hb*y1
print(f"Ps1={Ps1a/1e5:.1f} bars, ou {Ps1b/1e5:.1f} bars")
```

```
Ps1=8.7 bars, ou 8.4 bars
```

Partant du fond, le gaz restera dissous jusqu'à ce que la pression locale dans le tube devienne inférieure à 8.7 (ou 8.4) bars

2 Bilan 1D de quantité de mouvement en écoulement monophasique

Définition du débit massique

$$\dot{m} = \rho_l U_l \pi \frac{D^2}{4}$$

Bilan de quantité de mouvement, en conduite de section constante, en régime permanent

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_l g - \rho_l U_l \frac{dU_l}{dz} - \frac{4\tau_w}{D}$$

Le gradient de pression a trois contributions: hydrostatique, accélération et frottement sur la paroi. Ici, le terme d'accélération est nul, car la densité et la section étant constante, la vitesse débitante est constante par conservation du débit massique

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_l g - \frac{4\tau_w}{D}$$

$$P(z_s) - P_1 = -\rho_l g z_s - \frac{4\tau_w}{D} z_s$$

$$z_s = \frac{P_1 - P(z_s)}{\rho_l g + \frac{4\tau_w}{D}}$$

On a noté P_1 la pression à l'entrée du tube. En appliquant le théorême de Bernoulli à l'extérieur du tube entre la surface libre et l'entrée dans le tube:

$$P_2 + \rho_l g h + 0 = P_1 + 0 + \frac{1}{2}\rho_l U_l^2$$

On trouve la pression en bas du tube P_1:

[7]:
```
Ul=3.6 #m/s
Pdyn=1/2*rhol*Ul**2
P1=P2+rhol*g*h-1/2*rhol*Ul**2
print(f"La contribution de la pression dynamique est de {Pdyn/1e5:.3f} bars")
print(f"La pression à l'entrée du tube est de {P1/1e5:.2f} bars")
```

```
La contribution de la pression dynamique est de 0.065 bars
La pression à l'entrée du tube est de 20.56 bars
```

On rappelle la définition de la contrainte de frottement pariétale à partir du coefficient de frottement:

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2}\rho_l U_l^2$$

[8]:
```
Cf=0.0043
tauw=Cf*0.5*rhol*Ul**2
print(f"Contrainte : {tauw:.2f} Pa")
```

```
Contrainte : 27.86 Pa
```

Pour le calcul, on accepte les valeurs calculées avec 8.7 bars, 8.4 bars ou 8 bars. On accepte aussi l'oubli de la contribution dynamique à l'entrée du tube.

En revanche, on n'accepte pas l'oubli de la friction.

[9]:
```
zsa1=(P1-Ps1a)/(rhol*g+4*tauw/D)
zsa2=(P1+Pdyn-Ps1a)/(rhol*g+4*tauw/D)
zsb1=(P1-Ps1b)/(rhol*g+4*tauw/D)
zsb2=(P1+Pdyn-Ps1b)/(rhol*g+4*tauw/D)
zsc1=(P1-8e5)/(rhol*g+4*tauw/D)
zsc2=(P1+Pdyn-8e5)/(rhol*g+4*tauw/D)
print(f"Valeurs de zs acceptées entre {zsa1:.1f}m et {zsc2:.1f}m")
print(f"Oublier la chute de pression dynamique en entrée de tube correspond à␣
↪surestimer zs de 0.6m.")
```

```
Valeurs de zs acceptées entre 111.9m et 119.0m
Oublier la chute de pression dynamique en entrée de tube correspond à surestimer
zs de 0.6m.
```

3 Bilan masse de l'espèce chimique CO2

Le débit massique total est noté $\dot{m}$. Il se décompose en un débit massique de gaz $\dot{m}_g$ et un débit massique de liquide $\dot{m}_l$. Le liquide contient une fraction massique de CO_2 dissous y.

Dans la partie monophasique, où tout le gaz est dissous avec une fraction y_1, on a donc un débit massique de l'espèce CO_2 qui s'écrit:

$$y_1 \dot{m}$$

Dans la partie diphasique, on a un débit massique de l'espèce CO_2 somme du débit de gaz et du débit de CO_2 dissous:

$$\dot{m}_g + y\dot{m}_l$$

On utilise les relations $\dot{m}_g = x\dot{m}$ et $\dot{m}_l = (1-x)\dot{m}$:

$$\dot{m}_g + y\dot{m}_l = x\dot{m} + y(1-x)\dot{m}$$

La conservation s'écrit:

$$y_1\dot{m} = x\dot{m} + y(1-x)\dot{m}$$

$$y_1 = (1-y)x + y$$

$$x = \frac{y_1 - y}{1-y}$$

4 Conditions en sortie de tube

[10]:
```
y2a=P2/Ha
y2b=P2/Hb
print(f"y2={y2a:.2e} ou {y2b:.2e} selon la constante de Henry retenue (deux␣
↪réponses acceptées)")
```

```
y2=1.61e-03 ou 1.67e-03 selon la constante de Henry retenue (deux réponses
acceptées)
```

[11]:
```
x2a=(y1-y2a)/(1-y2a)
x2b=(y1-y2b)/(1-y2b)
print(f"x2={x2a:.5f} ou {x2b:.5f} selon la constante de Henry retenue (deux␣
↪réponses acceptées)")
print(f"De toute façon, avec 3 chiffres significatifs, x2={x2a:.2e}")
```

```
x2=0.01241 ou 0.01236 selon la constante de Henry retenue (deux réponses
acceptées)
De toute façon, avec 3 chiffres significatifs, x2=1.24e-02
```

[12]:
```
rho2=(x2a/rhog+(1-x2a)/rhol)**-1
print(f"rho2={rho2:.1f} kg/m3")
```

```
rho2=126.9 kg/m3
```

Par conservation du débit:

$$\rho_l U_l = \rho_2 U_2$$

[13]:
```
U2=rhol/rho2*Ul
print(f"U2={U2:.1f} m/s")
```

```
U2=28.4 m/s
```

C'est un problème classique de mécanique. Le jet possède au départ une énergie cinétique et va la convertir en énergie potentielle de pesanteur. Au maximum, il pourra monter à une altitude h_j telle que:

$$gh_j = \frac{1}{2}U_2^2$$

[14]:
```
hj=U2**2/(2*g)
print(f"La hauteur maximale du jet est de {hj:.1f}m")
```

```
La hauteur maximale du jet est de 41.0m
```

5 Bilan 1D de quantité de mouvement en partie diphasique

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g - \rho U \frac{dU}{dz} - \frac{4\tau_w}{D}$$

Le terme d'accélération n'est pas nul car la densité et donc la vitesse varie le long de la conduite

En intégrant brutalement le 1er et le 3ème terme du membre de droite par la méthode des trapèzes, on a:

$$P_2 - P(z_s) = -\bar{\rho} g(h - z_s) - \rho_l U_l \left(U_2 - U_l\right) - \frac{4\bar{\tau_w}}{D}(h - z_s)$$

Avec $\bar{\rho} = \frac{1}{2}\left(\rho_l + \rho_2\right)$ et $\bar{\tau_w} = \frac{1}{2}\left(\tau_w(U_l) + \tau_w(U_2)\right)$, soit:

$$h - z_s = \frac{P(z_s) - P_2 - \rho_l U_l \left(U_2 - U_l\right)}{\bar{\rho} g + \frac{4\bar{\tau_w}}{D}}$$

[15]:
```
rhob=(rhol+rho2)/2
tauw2=Cf*0.5*rho2*U2**2
tauwb=(tauw+tauw2)/2
zs2=h-(Ps1a-P2-rhol*Ul*(U2-Ul))/(rhob*g+4*tauwb/D)
print(f"zs 2è expression: {zs2:.1f} m")
```

```
zs 2è expression: 125.0 m
```

On a une petite différence entre les deux expressions. Donc la valeur prise pour la vitesse débitante n'est pas celle qui équilibre les équations du modèle. On peut par tatonnement chercher une solution. On peut aussi coder un modèle numérique en discrétisant plus finement le tube.