NFI/GE3A.
Option « Energies Renouvelables ».
Energies Marines.
Corrigé du TD hydrolienne

F. Ravelet[a]

[a] *Arts et Metiers Science and Technology,*
LIFSE (Lab. Ingénierie des Fuides et des Systèmes Energétiques),
151 boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris, France.
contact: florent.ravelet@ensam.eu

20 octobre 2020

Pour aller plus loin sur le modèle global de Froude - Betz, l'influence de la rapidité spécifique et la théorie de l'élément de pale, vous pouvez consulter le dossier BM4640 des Techniques de l'Ingénieur (consacré aux éoliennes). Pour les plus curieux, vous pouvez consulter le dossier BM4540 des Techniques de l'Ingénieur traitant des hélices de propulsion.

1 Dimensionnement global

Cette partie montre comment l'utilisation des principes fondamentaux de la mécanique (bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie) permet de réaliser un prédimensionnement global de l'hydrolienne. On aboutit à définir le diamètre et la vitesse de rotation en fonction de la puissance à extraire et des conditions du courant.

1. Un fluide de masse volumique ρ s'écoule à la vitesse C_0. En un temps dt, à travers un élément de surface dS, la masse de fluide déplacée vaut $dm = \rho\, C_0\, dt\, dS$. Cette masse possède une énergie cinétique $dE_k = \frac{1}{2} dm C_0^2$. La puissance motrice par unité de surface vaut $P_m = \frac{dE_k}{dS\, dt}$ (c'est l'énergie qui passe par unité de surface et par unité de temps) :

$$P_m = \frac{1}{2} \rho\, C_0^3$$

2. Energie entrant dans le domaine par l'amont pendant dt : $dE_{k,0} = \frac{1}{2} \rho\, C_0\, dt\, S_0\, C_0^2$. Energie sortant du domaine par l'aval pendant dt : $dE_{k,2} = \frac{1}{2} \rho\, C_2\, dt\, S_2\, C_2^2$. La masse mise en jeu pendant dt vaut $m = \rho\, C_0\, dt\, S_0 = \rho\, C_2\, dt\, S_2$ (égalité par conservation de la masse). L'énergie par unité de masse cédée à l'hydrolienne par le courant pendant dt vaut donc :

$$E=\frac{dE_{k,2}-dE_{k,0}}{m}=\frac{1}{2}\left(C_2^2-C_0^2\right)$$

Cette valeur est négative car le fluide cède de l'énergie. La puissance correspondante vaut :

$$P=\frac{mE}{dt}=q_m\,E=\frac{1}{2}q_m\left(C_2^2-C_0^2\right)$$

3. — On note la pression statique loin en amont et loin en aval p_∞. On applique le théorême de Bernoulli entre 0 et a : $p_\infty+\frac{1}{2}\rho C_0^2=p_a+\frac{1}{2}\rho C^2$, puis entre b et 2 (la vitesse C est la même de part et d'autre de l'hydrolienne) : $p_b+\frac{1}{2}\rho C^2=p_\infty+\frac{1}{2}\rho C_2^2$. On en déduit le saut de pression à la traversée de l'hydrolienne :

$$p_a-p_b=\frac{1}{2}\rho\left(C_0^2-C_2^2\right)$$

La force F ($\vec{e_{ax}}$ est la direction de l'écoulement) qu'exerce le fluide sur le disque est donc :

$$\vec{F}=\left(p_a-p_b\right)\vec{e_{ax}}S$$

— Théorême des quantités de mouvement appliqué au domaine limité par la surface S_0, le tube en pointillé et la surface S_2 (voir Fig. 1) :
Le flux de quantité de mouvement à travers la frontière du domaine est égale à la somme des forces agissant **sur** le fluide. Avec $\vec{n}$ la normale sortante au domaine :

$$\oint_{S_0\cup Tube\cup S_2}\rho\left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right)\vec{v}d_s=-F\vec{e_{ax}}+\oint_{S_0\cup Tube\cup S_2}-p_\infty\vec{n}d_s$$

La contribution de la pression extérieure sur les frontières est nulle car $\oint\vec{n}d_s=\vec{0}$. On a donc en projection sur $\vec{e_{ax}}$:

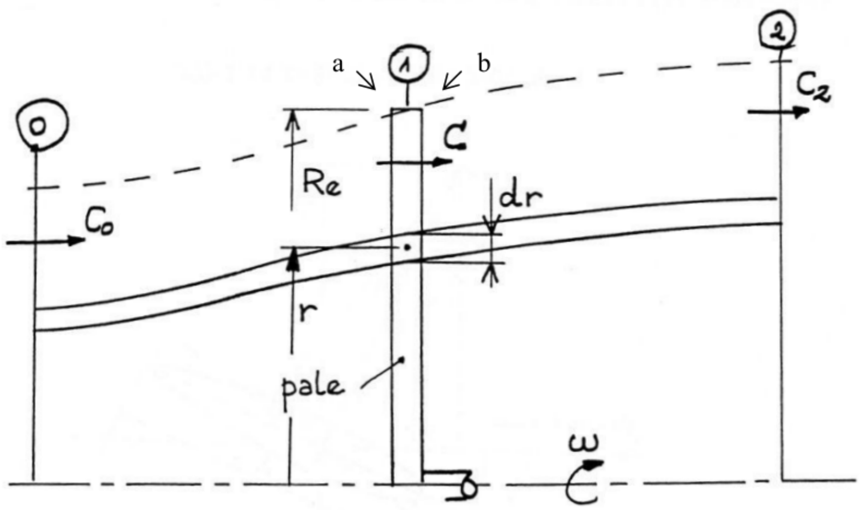

Figure 1 – Modèle global de Froude - Betz

$$-\rho C_0 S_0 C_0 + \rho C_2 S_2 C_2 = -F = \frac{1}{2}\rho\left(C_2^2 - C_0^2\right) S$$

Mais $q_m = \rho C_0 S_0 = \rho C_2 S_2 = \rho C S$, donc :

$$(C_2 - C_0)\, C = \frac{1}{2}(C_2^2 - C_0^2) = \frac{1}{2}(C_2 - C_0)(C_2 + C_0)$$

$$C = \frac{1}{2}(C_2 + C_0)$$

4. La puissance reçue par l'hydrolienne s'écrit $P_h = \frac{1}{2} q_m \left(C_0^2 - C_2^2\right)$. On utilise $q_m = \rho C S$ et le résultat précédant, on met C_0 en facteur et on introduit $x = \frac{C_2}{C_0}$:

$$P_h = \frac{1}{2}\rho S C_0^3\, \left(\frac{1}{2}\,(1+x)\left(1-x^2\right)\right)$$

On introduit le coefficient de puissance $C_p = \left(\frac{1}{2}\,(1+x)\,(1-x^2)\right)$. En étudiant la fonction (voir Fig. 2), on trouve un maximum pour $x = 1/3$ où $C_p = 16/27 \simeq 0.593$. Dans ce cas, on a $C_2 = C_0/3$ et $C = \frac{2}{3}C_0$.

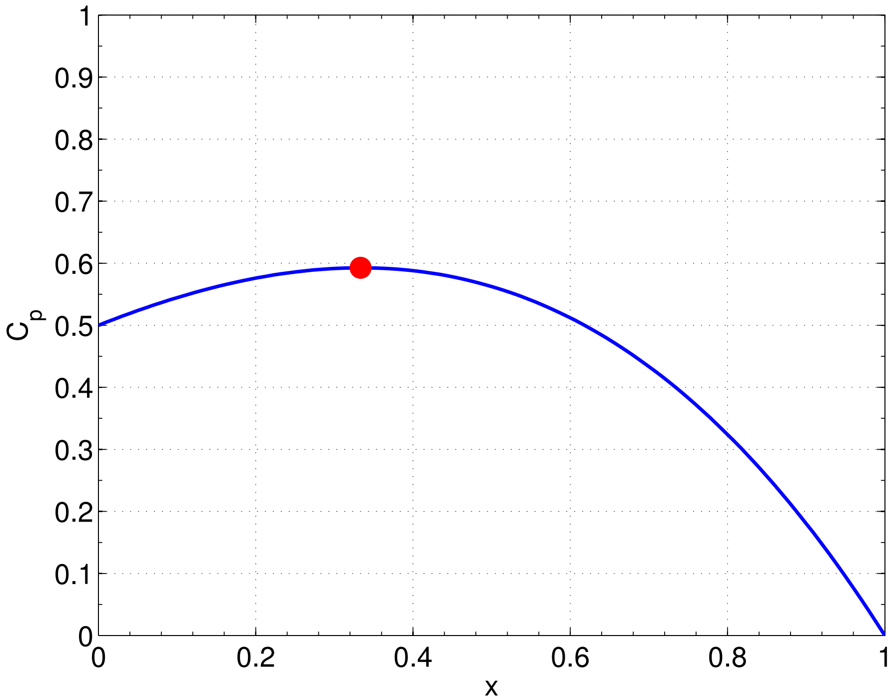

Figure 2 – Coefficient de puissance en fonction de x

5. Application numérique : $R_e \simeq 3$ m. Rendement global maxi : 62%.
6. Application numérique : $\lambda = 3 \Rightarrow \omega = 3.3$ rad.s^{-1}. On a $U_{tip} = \omega R_e = 10$ m.s^{-1}. Cette rapidité spécifique est un paramètre dimensionnant (nous verrons plus loin qu'il conditionne le calage du profil en périphérie). Chaque type de machine possède un λ optimisant les performances (voir Fig. 3). On appelle hydrolienne (ou éolienne) rapide une machine dont la rapidité spécifique est supérieure à 3.

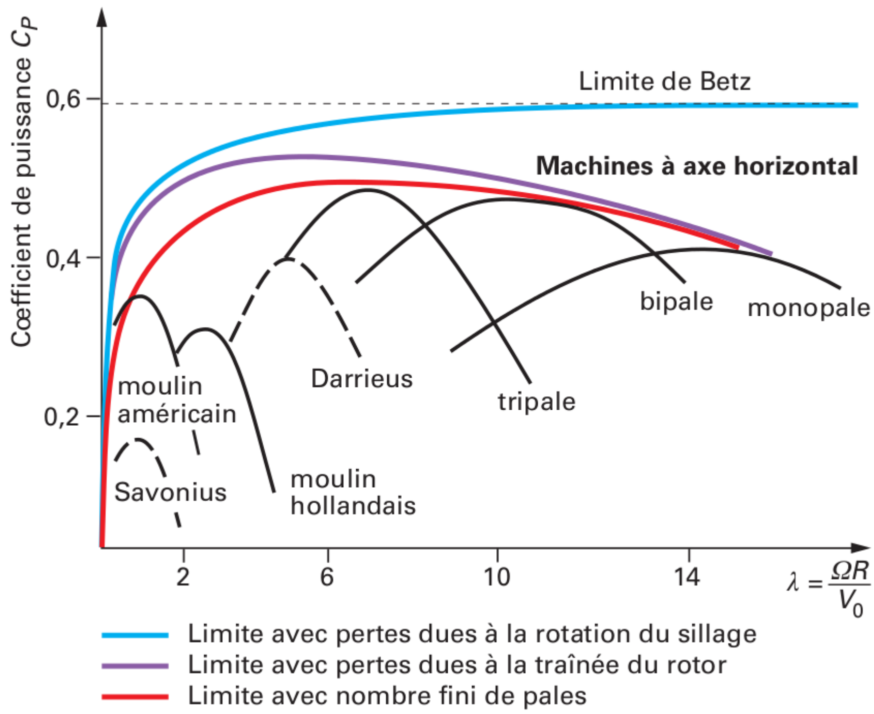

FIGURE 3 – Coefficient de puissance en fonction de λ (pour les éoliennes).

On remarque que pour les machines à axe horizontal, le rendement optimal augmente légèrement avec le nombre de pales (de une à trois) puis stagne et diminue pour un nombre de pales supérieur à six. On peut montrer que le λ optimal varie (en théorie) comme $1/Z$ avec Z le nombre de pales.

Dans notre cas (hydrolienne), un problème à anticiper peut être celui de la cavitation. On limite généralement la vitesse périphérique à 10 m.s^{-1}. C'est pourquoi on choisit ici $\lambda = 3$. Le nombre de pales optimal est alors de 6.

2 Etude de l'élément de pale

L'idée est de découper l'hydrolienne en couronnes entre les rayons r et $r + dr$, et d'analyser les efforts hydrodynamiques sur les éléments de pales ainsi isolés. Ces éléments de pales sont caractérisés par un type de profil (ici le NACA0015), un calage $\gamma(r)$, une corde $l(r)$ une envergure dr, se déplacent dans la direction $\vec{e_\theta}$ à une vitesse d'entrainement $U(r) = r\omega$ et sont soumis au courant absolu $C\vec{e_{ax}}$ [1].

7. Il s'agit en fait d'utiliser la définition des coefficients de portance et de trainée d'un profil. Dans le référentiel du profil (donc soumis à une vitesse $\vec{W}$), la force exercée par le fluide sur le profil est $d\vec{F}$. On la décompose en deux composantes, l'une dans la direction de $\vec{W}$ que l'on appelle *trainée* (dF_x), l'autre perpendiculaire

1. Pour les calculs on prendra pour cette valeur C_0 et non le facteur 2/3 de la partie précédente, qui est issu d'un modèle *global* qui remplace la machine par une *surface de discontinuité* : dans la réalité, le phénomène d'induction est progressif. Un véritable dimensionnement doit être bouclé avec une analyse.

à $\vec{W}$ que l'on appelle *portance* (dF_z). **Par convention**, les coefficients de trainée et de portance (C_x et C_z) sont tels que :

$$dF_x = C_x \, \frac{1}{2}\rho W^2 \, dS$$

$$dF_z = C_z \, \frac{1}{2}\rho W^2 \, dS$$

La surface de référence dS (surface alaire) est, également par convention, la surface projetée (envergure × corde), soit ici : $dS = l(r)dr$

8. — On remarque que l'angle entre $\vec{dF}$ et $\vec{dN}$ est $\alpha(r) - \epsilon$. On a alors

$$dN = dF \, \cos(\alpha(r) - \epsilon)$$

$$dT = dF \, \sin(\alpha(r) - \epsilon)$$

— La composante dT produit un couple $r\,dT$. La puissance utile est donc :

$$dP_u = r\,dT\,\omega$$

— La composante dN est la force qui va ralentir le fluide et lui prélever de l'énergie (son intégrale sur le disque hélice est la force F de la partie 1). La puissance fournie par le courant est :

$$dP_c = C\,dN$$

9. — Le rendement hydrodynamique local est :

$$\eta(r) = \frac{dP_u}{dP_c} = \frac{U\,dT}{C\,dN} = \frac{\tan\left(\alpha\left(r\right) - \epsilon\right)}{\tan\left(\alpha\left(r\right)\right)}$$

— Le rendement local est maximal quand ϵ est minimal. Cet angle s'appelle également l'angle de perte, sa cotangente vaut C_z/C_x, encore appelée finesse. L'angle d'incidence le mieux adapté est donc l'angle d'incidence donnant la finesse maximale.

— Pour le NAC0015, on relève une finesse maximale égale à 82 pour $i_0 = 10^o$. On a :

$$i_0 = 10^o$$

$$C_{z,0} = 0.95$$

$$C_{x,0} = \frac{0.95}{82} = 0.0116$$

10. On a la relation entre calage $\gamma(r)$, angle d'incidence i et angle du vent relatif $\alpha(r)$: $i = \alpha(r) - \gamma(r)$, donc, en choisissant d'utiliser les profils à une incidence i_0, il faut les caler selon la loi :

$$\gamma(r) = \alpha(r) - i_0 = \arctan\left(\frac{C}{r\omega}\right) - i_0$$

11. Pour dimensionner la corde des profils, on considère que la puissance utile récupérée dans chaque tube de courant est égale à la limite de Betz pour ce tube de courant dP_{max}, soit :

$$Z\,dP_u = Z\,r\,dT\,\omega = Z\,r\,\frac{1}{2}\rho W^2 l(r) dr C_{z,0}\,\omega \sin\left(\alpha\left(r\right)\right)$$
$$dP_{max} = \frac{16}{27}\frac{1}{2}\rho 2\pi r dr C_0^3$$

D'où :

$$l(r) = \frac{16}{27}2\pi\frac{C_0}{Z\omega C_{z,0}}\sin\left(\alpha\left(r\right)\right)$$

12. — Par définition, le nombre de cavitation σ est l'écart entre une pression de référence P_{ref} pour le système et la pression de vapeur saturante, adimensionné par la pression dynamique pour une vitesse de référence U_{ref}. Dans le cas d'un profil portant, **par convention**, P_{ref} est la pression statique à l'infini amont et U_{ref} la vitesse de l'écoulement incident (pour notre profil sur une machine tournante, $U_{ref} = W$ la vitesse relative).
    — De même, on définit un coefficient de pression le long du profil c_p comme étant la différence entre la pression statique locale P_{loc} et la pression de référence, adimensionnée par la pression dynamique de référence.
    — La cavitation apparaît lorsque $P_{loc} \leqslant P_{v,sat}$, soit :

    $$\sigma \leqslant -c_p$$

    — La position la plus défavorable est en haut de l'hydrolienne, car, à la fois, la pression hydrostatique y est plus faible et la vitesse y est plus grande (P_{ref} petit et U_{ref} grand $\Rightarrow \sigma$ petit).
    — D'après les lois de l'hydrostatique, $P_{ref} = P_a + \rho g(h_0 - R_e) \simeq 2.2$ bars. On a, en $r = Re$, $U_{ref}^2 = W^2 = (1+\lambda^2)C_0^2 \simeq 109$ m^2.s^{-2}. On calcule $P_{v,sat} = 1254$ Pa. On a finalement :

    $$\sigma = 3.9$$

    — $c_{p,min} = -3.2$ Donc, on a partout $\sigma > -c_p$, donc il n'y a pas de cavitation.
    — Si l'hydrolienne était sujette à cavitation, il faudrait soit baisser sa vitesse de rotation (au détriment des performances, voir Fig. 3), soit si c'est possible augmenter la profondeur d'immersion.