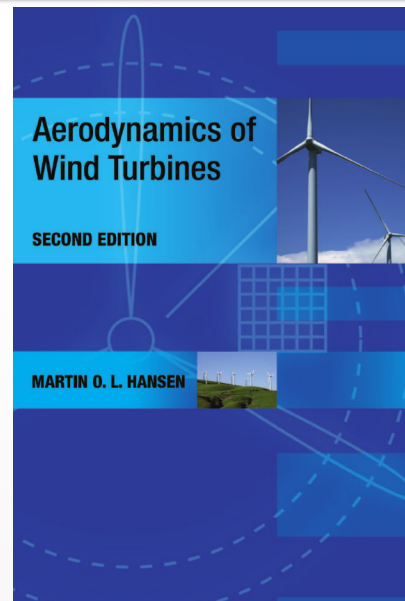


F. Ravelet
LIFSE
Arts et Métiers Science et Technologie

Eoliennes : théorie de Froude-Rankine

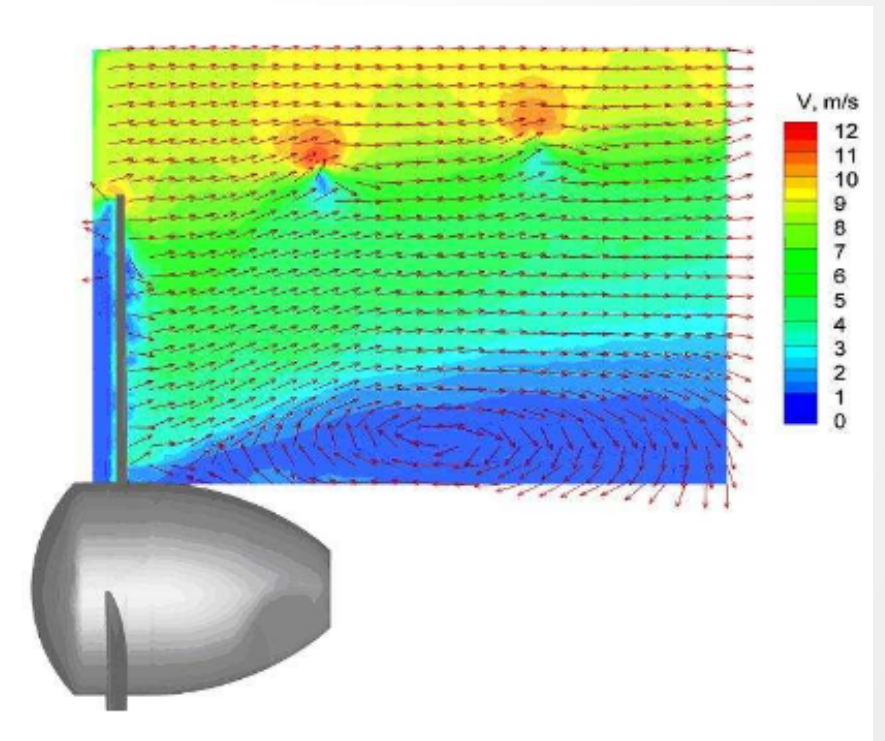


Théorie de Froude-Rankine

- L'éolienne récupère l'énergie cinétique du vent
- En raison de cette récupération l'éolienne ralentit le vent
- En conséquence, le tube de courant qui traverse l'éolienne augmente sa section afin de respecter le principe de conservation de la masse.



Calcul CFD



Mesures soufflerie ENSAM

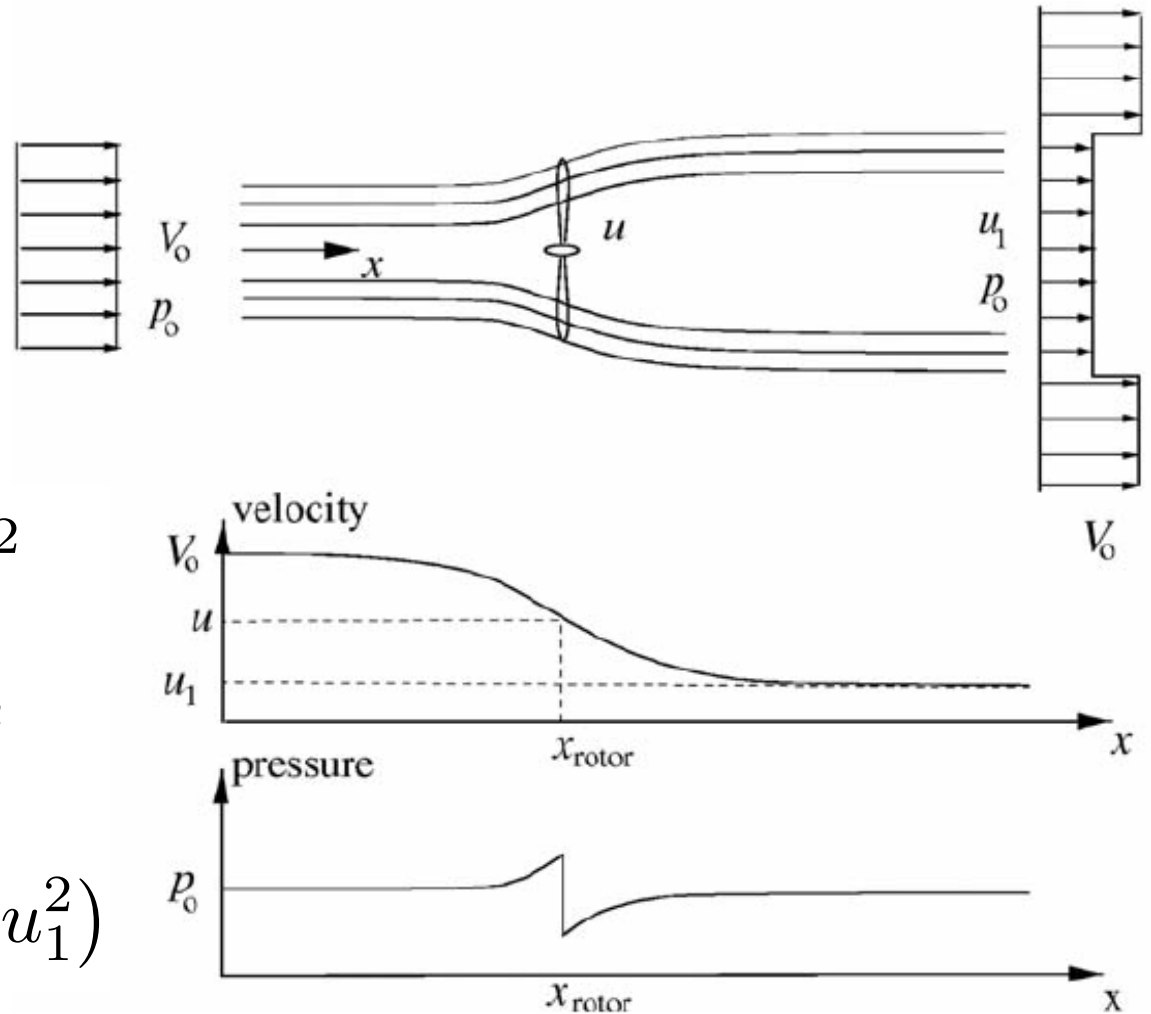
Modèle 0D, fluide parfait, sans rotation

- Eolienne modélisée par un disque poreux actif
- Théorème de Bernoulli :

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho V_0^2 = p^+ + \frac{1}{2}\rho u^2$$

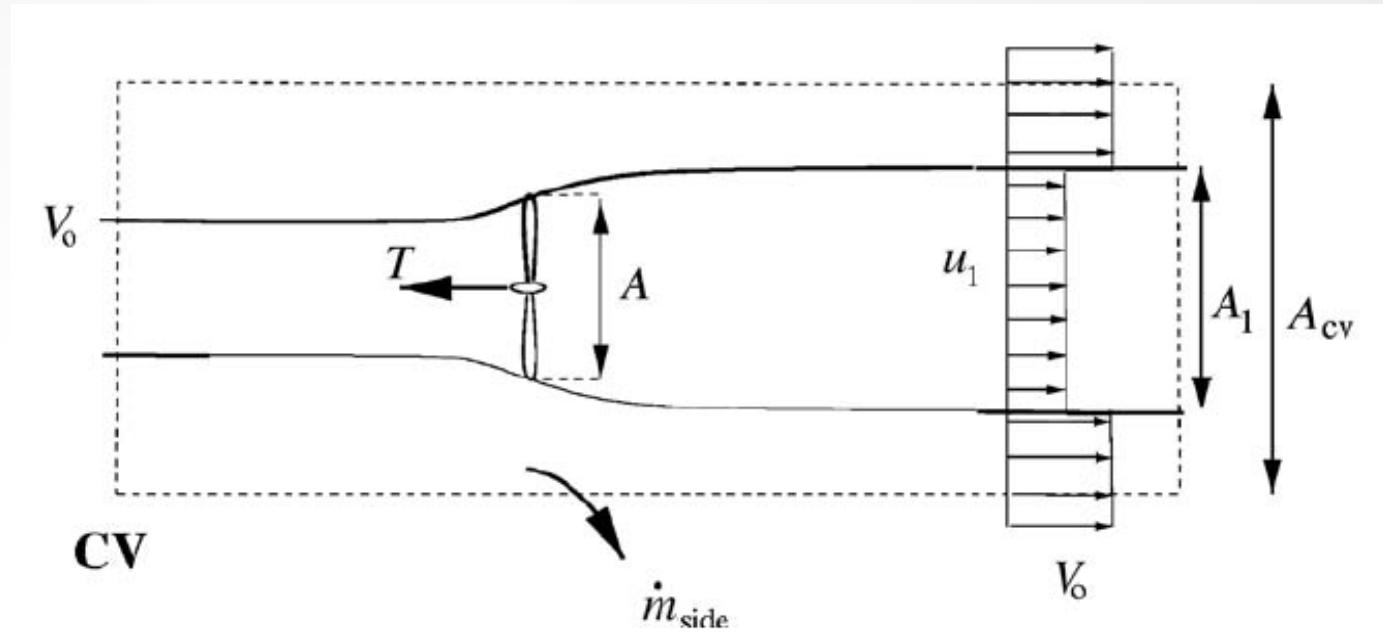
$$p^- + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho u_1^2$$

$$(p^+ - p^-) = \frac{1}{2}\rho (V_0^2 - u_1^2)$$



Modèle 0D, fluide parfait, sans rotation

- Bilan de masse et
- Bilan de quantité de mouvement axiale :



$$(\rho u_1^2 A_1 + \rho V_0^2 (A_{CV} - A_1) + \dot{m}_{side} V_0) - \rho V_0^2 A_{CV} = -T$$

$$\dot{m}_{side} = \rho A_1 (V_0 - u_1)$$

$$\dot{m} = \rho u A = \rho u_1 A_1$$

$$T = \dot{m} (V_0 - u_1)$$

Modèle 0D, fluide parfait, sans rotation

- Deux expressions pour la poussée T

$$T = \dot{m} (V_0 - u_1)$$

$$T = (p^+ - p^-) A$$

$$\rho A u (V_0 - u_1) = \frac{1}{2} \rho A (V_0^2 - u_1^2)$$

$$u = \frac{1}{2} (V_0 + u_1)$$

Modèle 0D, fluide parfait, sans rotation

- On exprime la poussée T et la puissance P en fonction du facteur d'induction axiale a

$$u = (1 - a) V_0$$

$$T = 2\rho V_0^2 a (1 - a) A$$

$$P = 2\rho V_0^3 a (1 - a)^2 A$$

- Introduction du coefficient de puissance C_p

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho V_0^3 A}$$

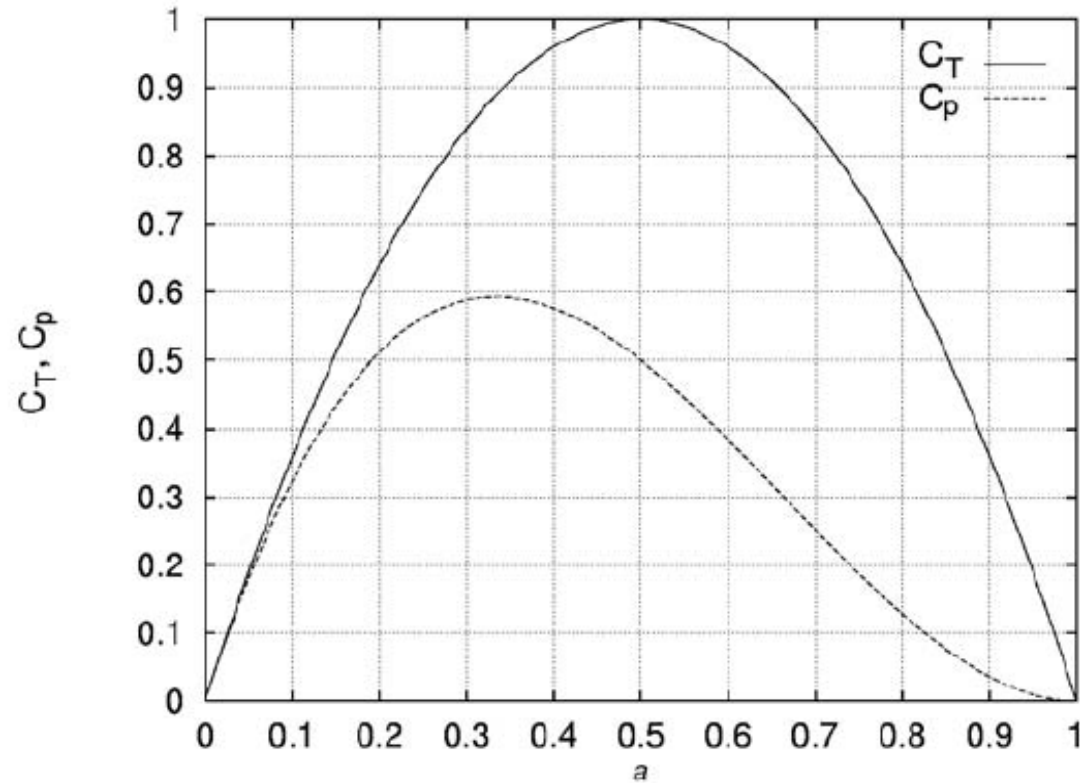
$$C_p = 4a (1 - a)^2$$

- Introduction du coefficient de poussée C_t

$$C_t = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 A}$$

$$C_t = 4a (1 - a)$$

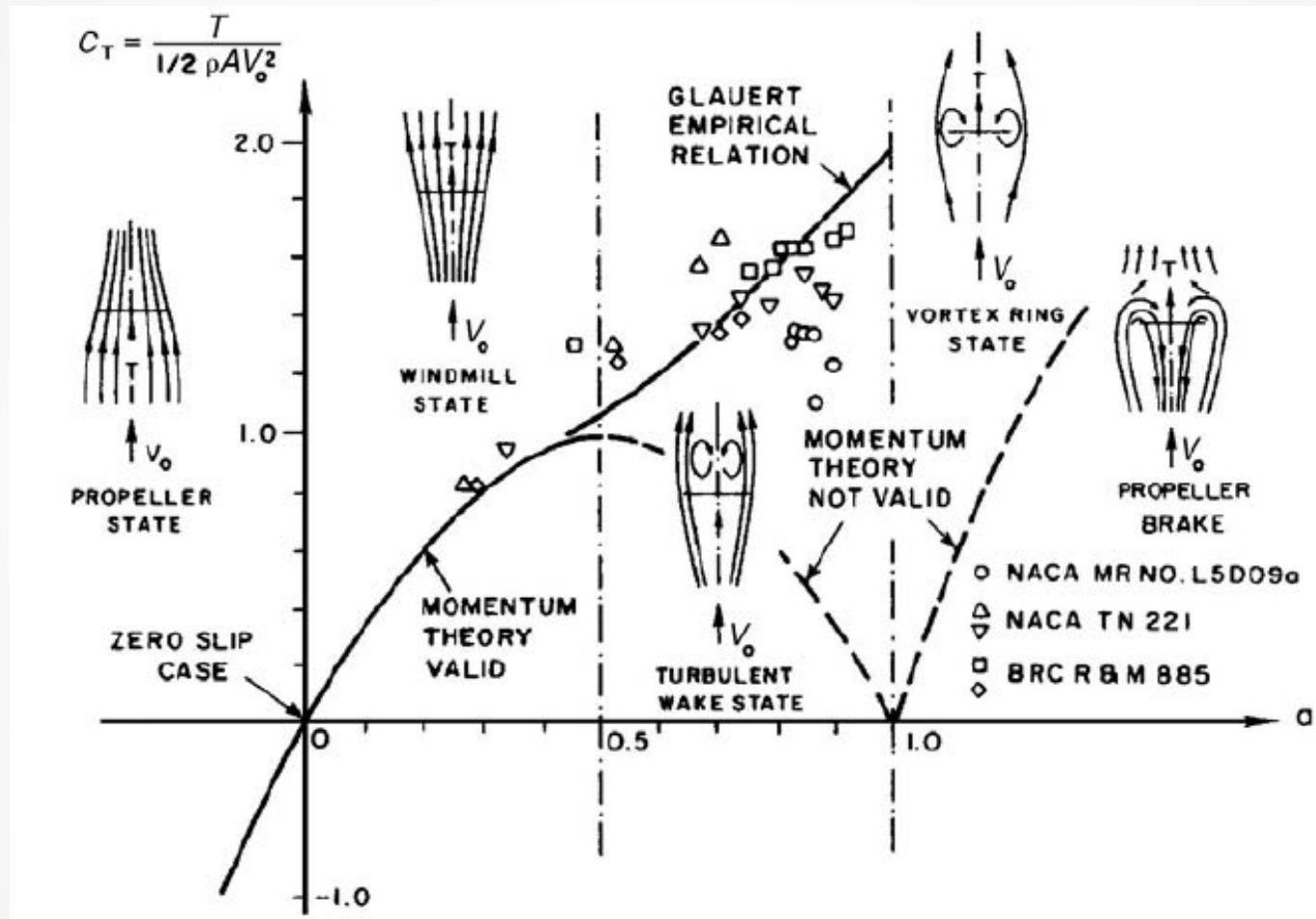
Modèle 0D, fluide parfait, sans rotation



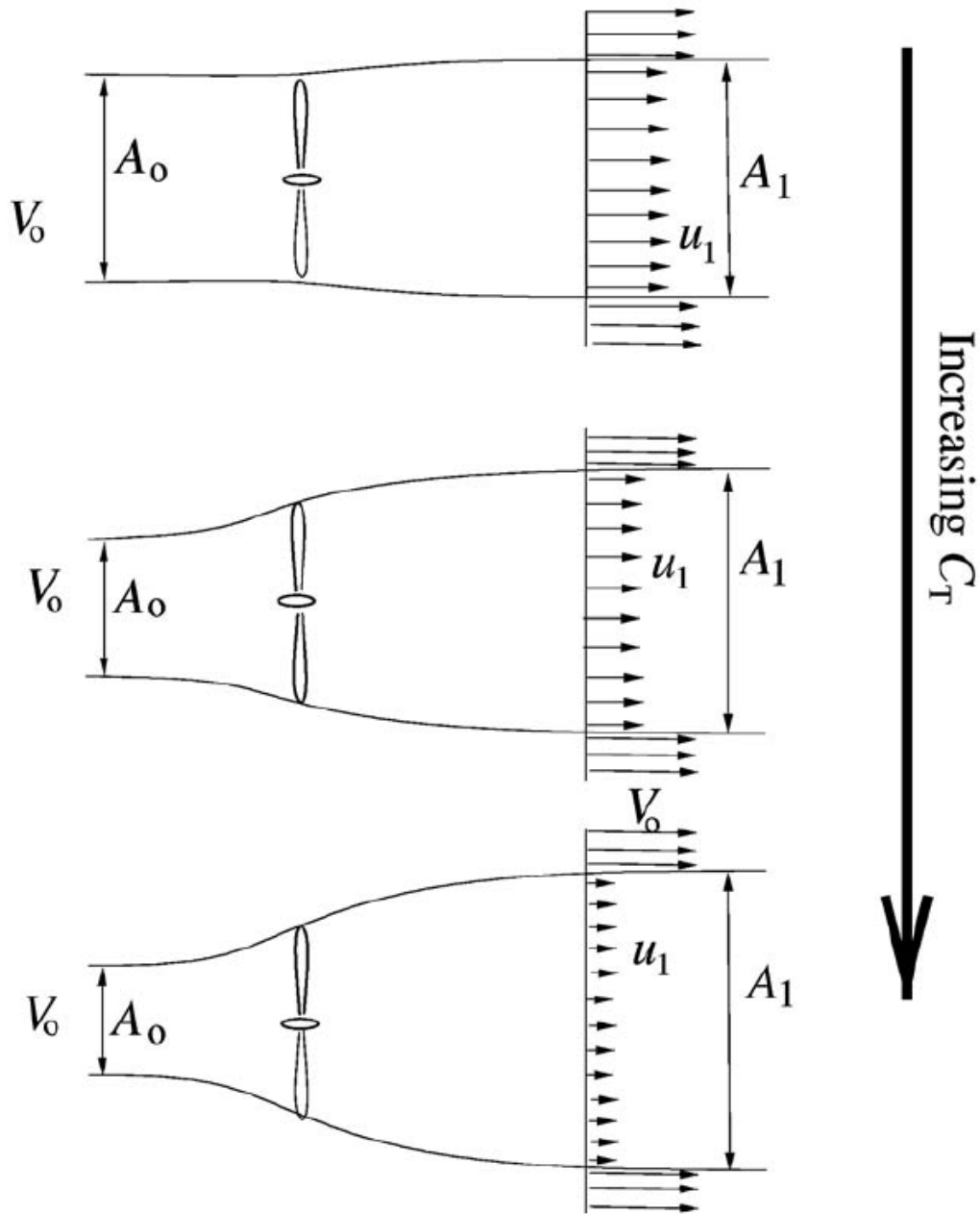
$$C_{p,max} = \frac{16}{27}$$
$$a = \frac{1}{3}$$

Limites à la théorie

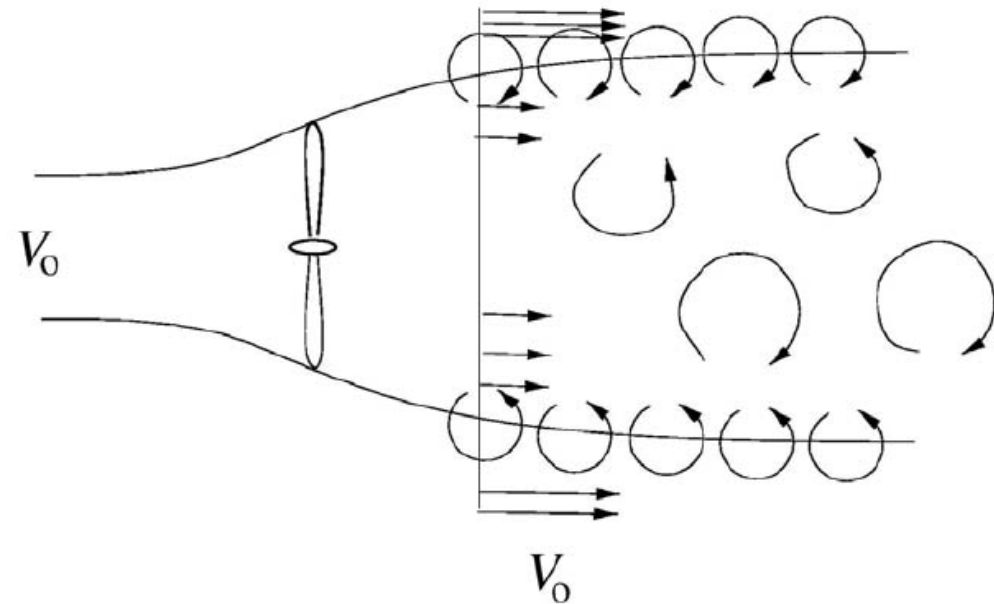
- La théorie devient invalide pour $a > 0.4$



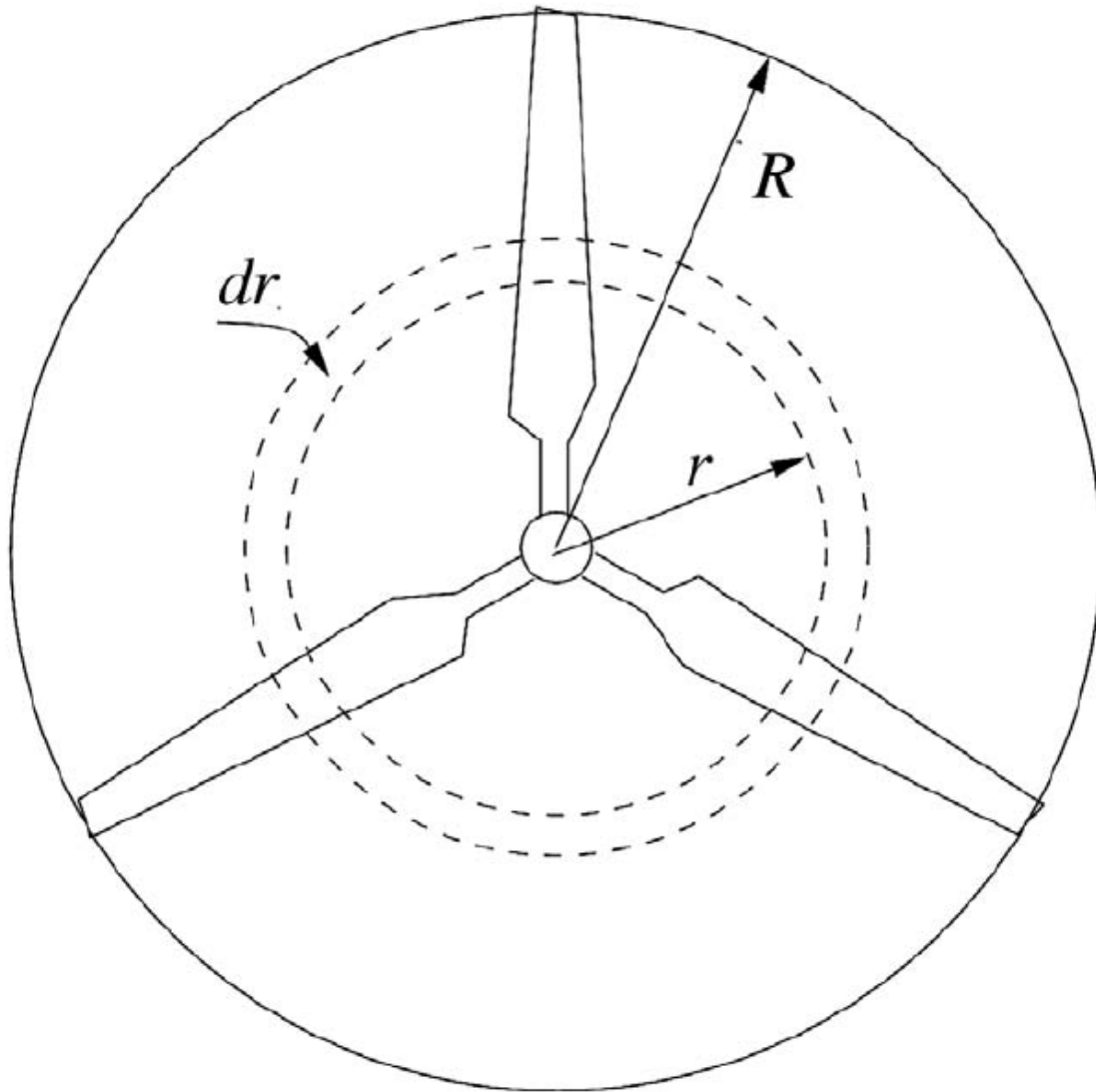
Limites à la théorie



- Pour les grands a : développement de turbulence dans le sillage



Modèle 1D, fluide parfait, rotation du sillage



- Bilans sur des tranches (modèle 1D)

$$d\dot{m} = 2\pi r dr (1 - a) V_0$$

$$dP = d\dot{m} \omega r C_\theta$$

$$= 2\pi r^2 \rho (1 - a) V_0 \omega C_\theta dr$$

Modèle 1D, fluide parfait, rotation du sillage

- Effet d'induction tangentielle: introduction du coefficient d'induction tangentielle a'

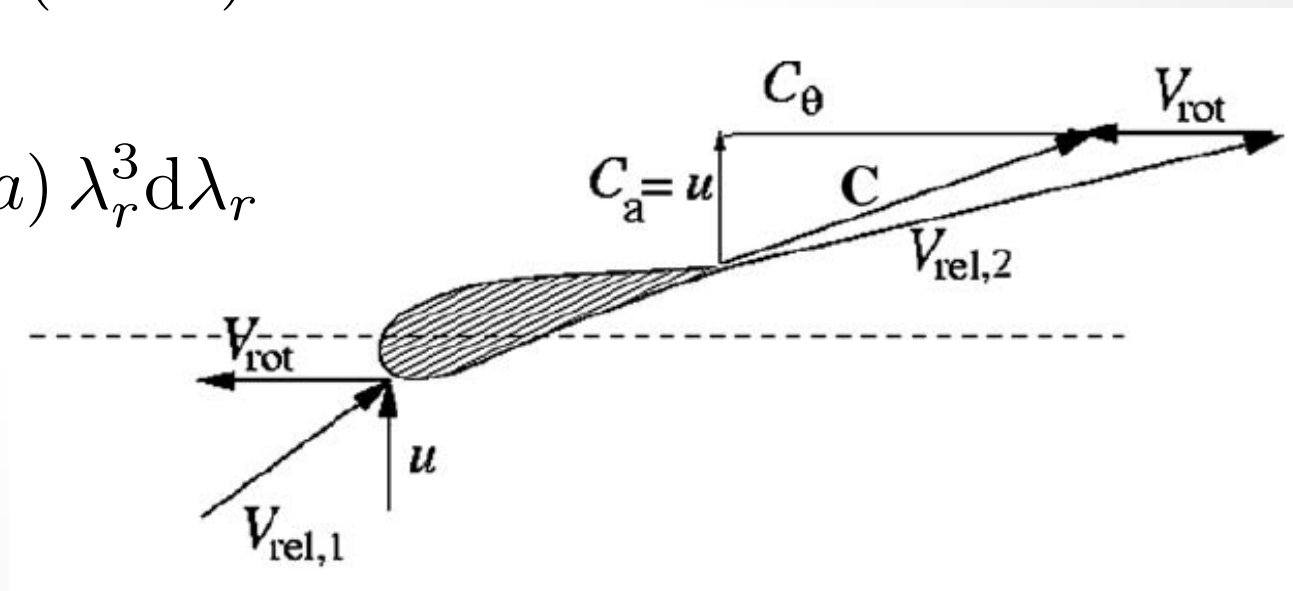
$$C_\theta = 2a'\omega r$$

$$dP = 4\pi\rho a' (1 - a) V_0\omega^2 r^3 dr$$

$$P = 4\pi\rho\omega^2 V_0 \int_0^R a' (1 - a) r^3 dr$$

$$C_p = \frac{8}{\lambda^2} \int_0^\lambda a' (1 - a) \lambda_r^3 d\lambda_r$$

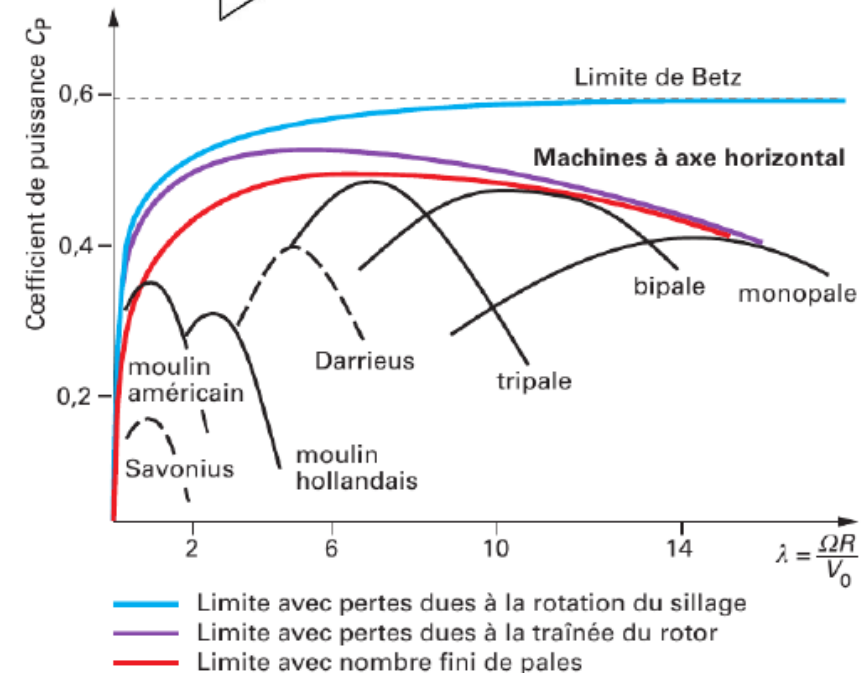
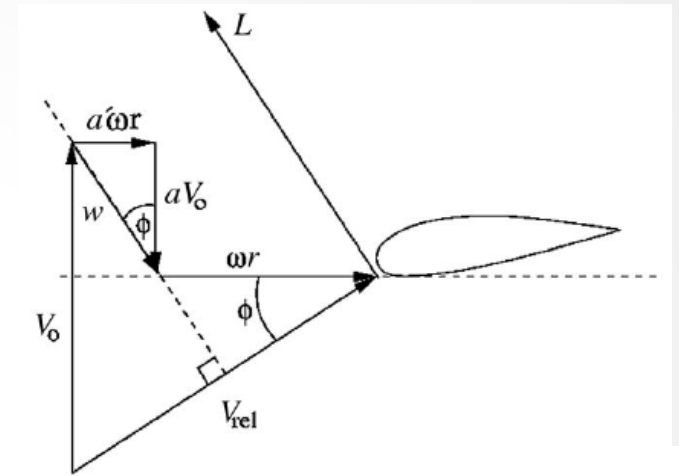
$$\text{Rappel : } \lambda = \frac{R\omega}{V_0}$$



Modèle 1D, fluide parfait, rotation du sillage

- On cherche l'optimum de puissance dans le cadre de ce modèle

- En fluide parfait, la vitesse induite, qui est parallèle à la force de portance L , est perpendiculaire à la vitesse relative.
- On en tire des relations entre a , a' et λ_r
- Correction à la limite de Betz
- Correction due au nombre fini de pales : facteur de Prandtl



Application

Un rotor éolien $D= 40$ m est supposé fonctionner dans les conditions de la théorie de Froude-Rankine avec le rendement maximum de Betz . La vitesse à l'infini amont est $V_{\infty} = 12$ m/s et la vitesse de rotation 30 rpm.

On vous demande de calculer :

- 1- La force axiale exercée par le vent sur le rotor
- 2- Le diamètre de sillage à l'infini aval du tube de courant qui passe par le rotor éolien
- 3- la vitesse spécifique λ de l'éolienne
- 4- La vitesse du vent relatif au profil en extrémité de pale
- 5- avec l'hypothèse d'un $C_p=0,35$, veuillez calculer alors le coefficient d'induction axiale a .

Prendre pour l'air $\rho = 1.225$ kg/m³