

Introduction à la turbulence

Florent Ravelet¹

Laboratoire d'Ingénierie des Fluides et des Systèmes Energétiques

¹Arts et Métiers - Sciences et Technologies

6 octobre 2021



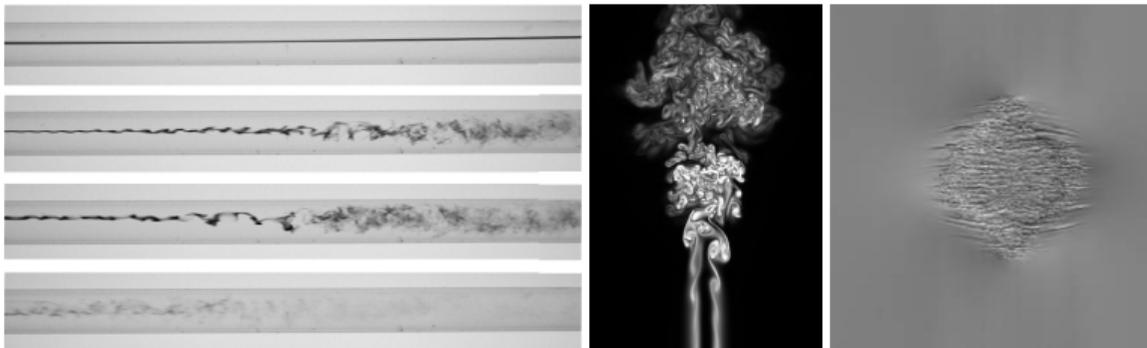
LIFSE





Origines de la turbulence

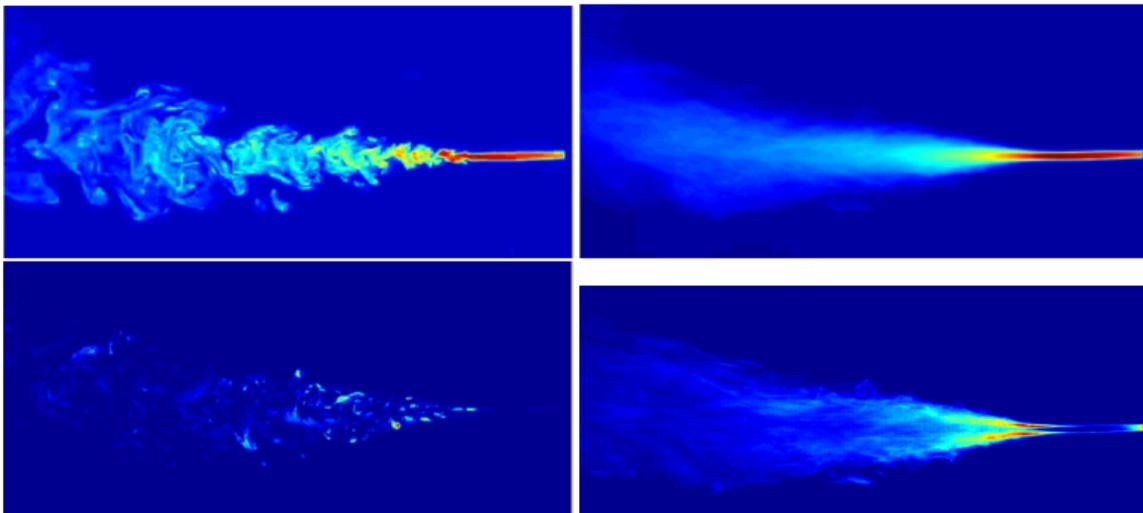
Notions importantes sur la turbulence



- Expérience de Reynolds : écoulement de Poiseuille cylindrique. Toutes les photos sont prises au même $Re = 5000$
- Visualisation de la vorticité dans un jet turbulent
- Spot turbulent dans un écoulement de Couette plan
- Un écoulement peut être instable : \exists solutions multiples. Le monde n'est pas linéaire.
- Etymologie de la turbulence :
 - "une foule de tourbillons",
 - *i.e.* structures à toutes les échelles, fluctuantes.



Exemple : jet turbulent



De haut en bas et de gauche à droite : instantané, moyenne, fluctuation (moyenne soustraite d'un instantané) et variance.

[Lien vers les films.](#)



Séparation entre partie moyenne et fluctuations



Décomposition de Reynolds

Soit un champ d'une grandeur hydrodynamique $\mathcal{G}(\vec{x}, t)$. On peut définir plusieurs moyennes.

- Moyenne d'ensemble. On répète N fois la même expérience depuis $t = 0$. On pose :

$$\langle \mathcal{G}(\vec{x}, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_i(\vec{x}, t)$$

- Moyenne temporelle. On moyenne sur un temps T suffisamment grand pour avoir convergence et indépendance par rapport à t_0 de

$$\bar{\mathcal{G}}(\vec{x}) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{G}(\vec{x}, t_0 + t) dt$$

On montre, pour \mathcal{F}, \mathcal{G} deux champs et a une constante :

$$\langle \mathcal{F} + a\mathcal{G} \rangle = \langle \mathcal{F} \rangle + a \langle \mathcal{G} \rangle$$

$$\langle \langle \mathcal{F} \rangle \mathcal{G} \rangle = \langle \mathcal{F} \rangle \langle \mathcal{G} \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial i} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathcal{F} \rangle}{\partial i}$$



Exemple d'équation linéaire

Equation de la chaleur dans un solide homogène :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

Fluctuation T' sur champ moyen \bar{T} : $T(\vec{x}, t) = \bar{T}(\vec{x}) + T'(\vec{x}, t)$

$$\rho c \frac{\partial \bar{T} + T'}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla (\bar{T} + T'))$$

Opérateur de moyenne linéaire, commutant avec dérivées \Rightarrow équation pour la moyenne :

$$0 = \nabla \cdot (\lambda \nabla \bar{T})$$

Equation pour la fluctuation :

$$\rho c \frac{\partial T'}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T')$$

Séparation, pas d'influence de la fluctuation sur la moyenne.



Exemple d'équation non-linéaire

Equation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

Composante i en notation indicielle (coordonnées cartésiennes) :

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$$

Pour un fluide newtonien, $\boldsymbol{\tau}$ est linéaire en vitesse :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu (\nabla \mathbf{u} + {}^T \nabla \mathbf{u}) + \mu' (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$$

Décomposition de Reynolds, opérateur de moyenne linéaire, commutant avec dérivées \Rightarrow équation pour la moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ji}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{u'_i u'_j})$$

Nouveau terme : **le tenseur de Reynolds**, les fluctuations affectent la moyenne.



Modes de transport de la quantité de mouvement

Autre forme équation de la quantité de mouvement, fluide newtonien, écoulement incompressible :

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}$$

(bilan de force par unité de masse, interprétable comme équation de transport de la vitesse).

- Viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ($\simeq 1.0 \times 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour de l'eau, $\simeq 1.5 \times 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ pour de l'air).
Homogène à un coefficient de diffusion.

Transport de quantité de mouvement (par unité de masse) par **diffusion moléculaire**.

- Terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$.
Non linéaire.

Transport convectif.

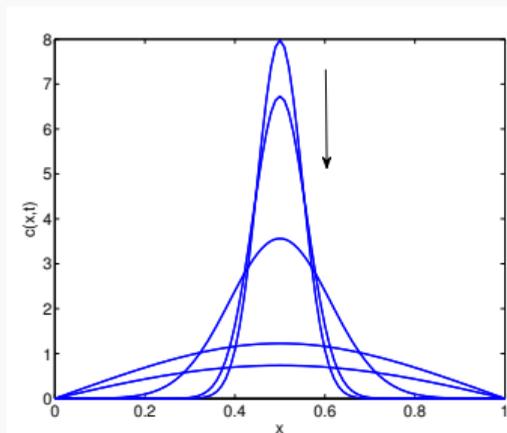


Transport diffusif

- Processus général (diffusion de la matière, de la chaleur, ...) par lequel un système macroscopique va s'homogénéiser sous l'effet de l'agitation à l'échelle moléculaire.
- Equation de diffusion (coefficient D constant) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \Delta \phi$$

- Temps diffusif sur une distance δ :
 $\tau_D = \frac{\delta^2}{D}$.
- Au cours du temps, un pic va s'aplatir avec une taille caractéristique qui croît comme : $\delta \propto \sqrt{Dt}$.
- Autre exemple : mise en rotation d'un cylindre.





Transport convectif de quantité de mouvement

- La vitesse transporte de la quantité de mouvement.
- Temps de transport sur une distance δ :
 $\tau_C = \frac{\delta}{U}$.
- Observation : au cours du temps, l'épaisseur d'une couche de mélange croît comme : $\delta \propto (\Delta U) t$.
- Tourbillon *superposé* à l'écoulement *nécessaire* pour assurer du *transport perpendiculaire* à l'écoulement parallèle de base.

Equation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u = 0$$

Déferlement, formation possible de chocs.

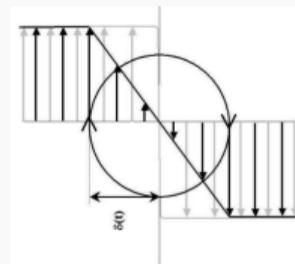
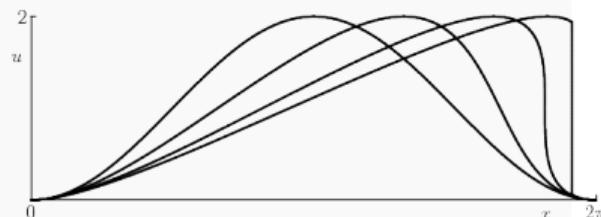


Illustration du transport convectif par un tourbillon sur une couche de cisaillement



Solution de l'équation de Burgers

Nombre de Reynolds



Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

Choix d'échelles caractéristiques L de longueur et U de vitesse.

Les $'$ désignent les grandeurs adimensionnelles :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \mathbf{u}' \cdot \nabla' \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \Delta' \mathbf{u}'$$

Le nombre de Reynolds Re est :

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho U^2}{\frac{\mu U}{L}} = \frac{\text{flux convectif qdm}}{\text{flux diffusif qdm}}$$

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\frac{L^2}{\nu}}{\frac{L}{U}} = \frac{\text{temps diffusif}}{\text{temps convectif}}$$

Si $Re \ll 1$, les effets diffusifs dominant. *Ecoulements rampants*. Solutions uniques, très stables.

Nombre de Reynolds



Solutions laminaires en écoulements parallèles

Pour un écoulement parallèle, stationnaire, terme non-linéaire convectif $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$.

Solution analytique simple possible (écoulements de Couette plan, Poiseuille ou Taylor-Couette).

Forces $\propto V \Rightarrow$ coefficients $\propto Re^{-1}$.

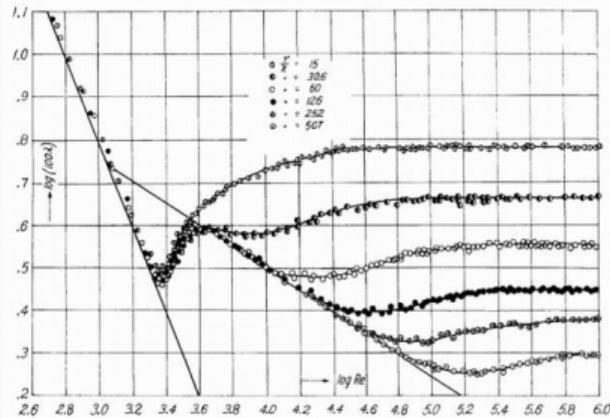
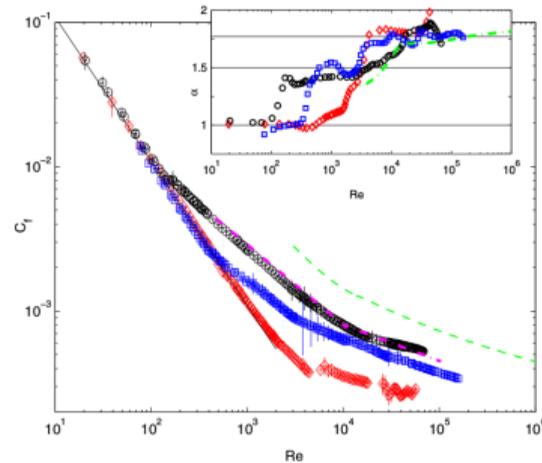


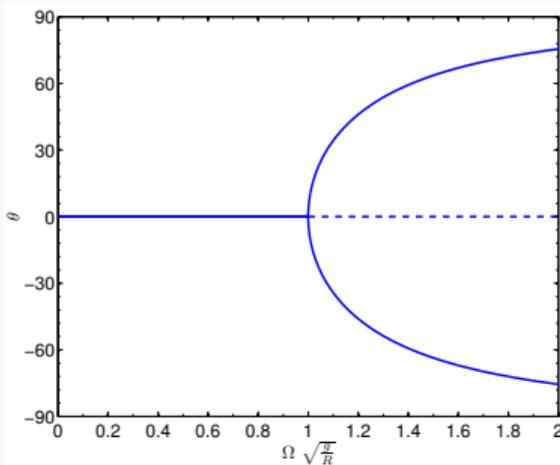
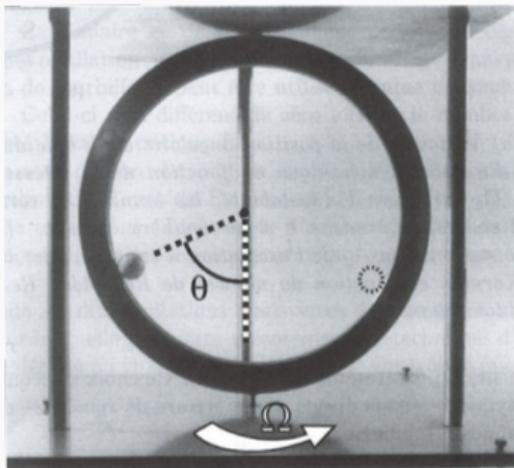
Figure 8.- Relation between $\log(100\lambda)$ and $\log Re$.



Coefficients de perte de charge et de friction vs Re, Poiseuille cylindrique & Taylor-Couette.



Instabilités hydrodynamiques : modèle simple de bifurcation

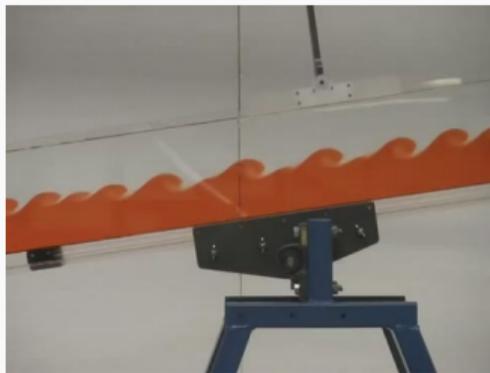


Bille dans un cerceau en rotation.



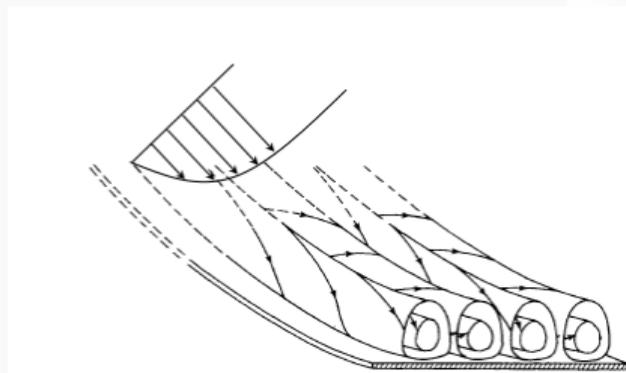
Mécanismes possibles d'instabilité

- Instabilité de cisaillement (point d'inflexion dans le profil).



Instabilité de Kelvin-Helmholtz d'une couche de mélange.

- Instabilité centrifuge ($\frac{d}{dr} (ru(r))^2 < 0$).



Instabilité de Görtler d'une couche limite sur paroi concave.



Scénarios de transition

- Supercritique.
 - Sillages
 - Écoulements courbes (instabilités centrifuges).

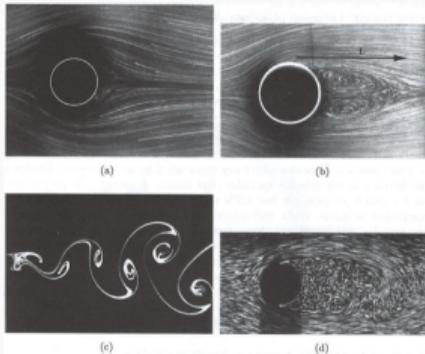
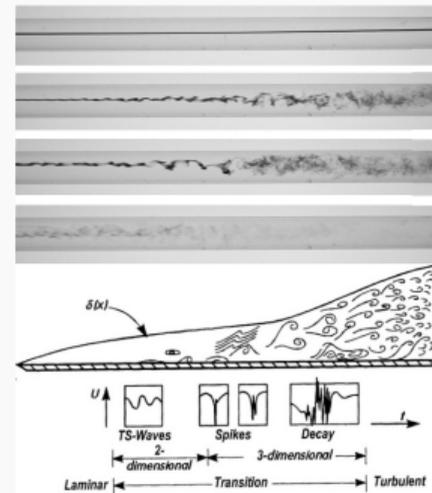


FIG. 2.8 – Visualisation d'un écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds ; (a) écoulement symétrique entre amont et aval à petit nombre de Reynolds ($Re = 1,54$) ; (b) apparition de deux zones de recirculation fixes en arrière du cylindre ($Re = 26$) ; (c) émission périodique de tourbillons formant une allée de Karman ($Re = 200$) ; (d) sillage turbulent ($Re = 0,8 \cdot 10^4$) (photos a, b et c : S. Taneda, photo d : H. Werté).

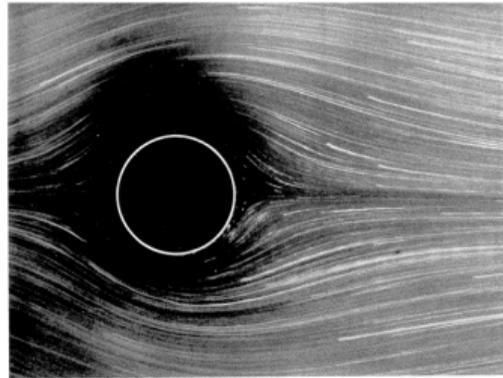
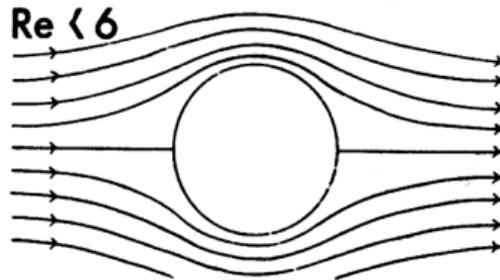
- Sous-critique.
 - Écoulements de Poiseuille, de Couette plan.
 - Couches limites.



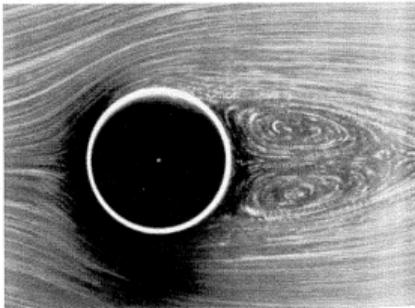
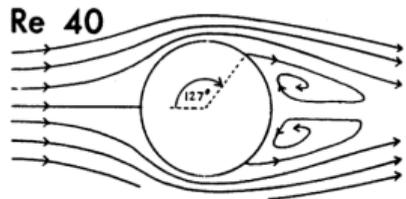
Etapes de la transition derrière un cylindre

Caractéristiques :

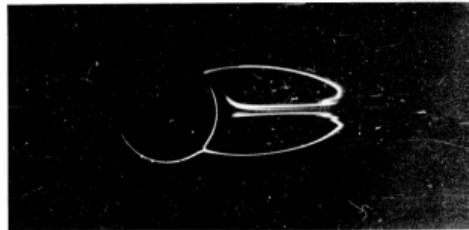
- ▶ Rupture des symétries
- ▶ Déclenchement de phénomènes instationnaires
 1. Lâcher tourbillonnaire d'arrière corps (nombre de Reynolds)
 2. Entrée en tremblement d'un profil d'aile (nombre de Mach et de Reynolds)



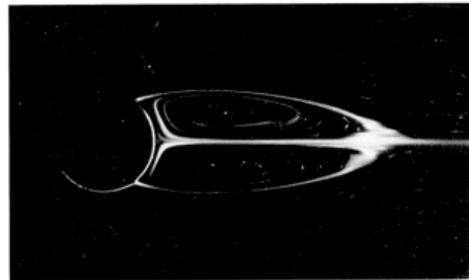
Etapes de la transition derrière un cylindre



42. Circular cylinder at $R=26$. The downstream distance to the cores of the eddies also increases linearly with Reynolds number. However, the lateral distance between

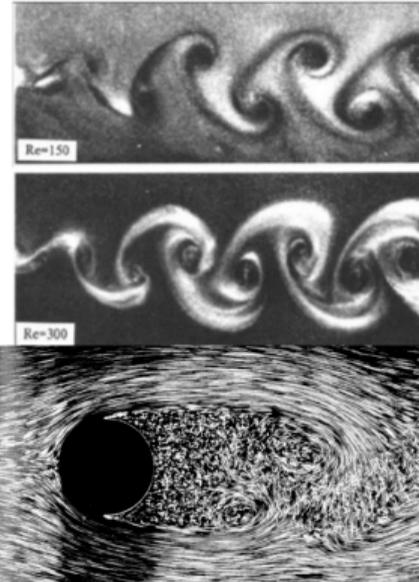
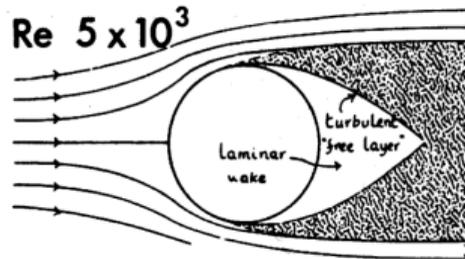
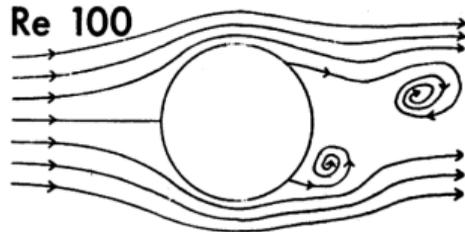


45. Circular cylinder at $R=28.4$. Here just the boundary of the recirculating region has been made visible by coating the cylinder with condensed milk and setting it in motion through water. Taniaka 1955



46. Circular cylinder at $R=41.0$. This is the approximate upper limit for steady flow. Far downstream the wake has already begun to oscillate transversally. Two irregular gashers are appearing on the boundary of the recirculating region, but diving out as they reach its downstream end. Taniaka 1955

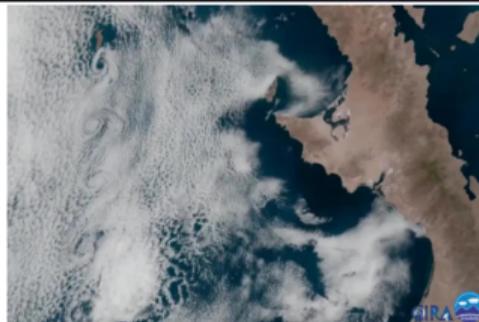
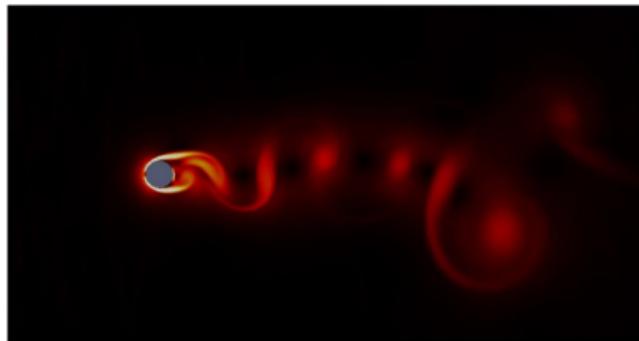
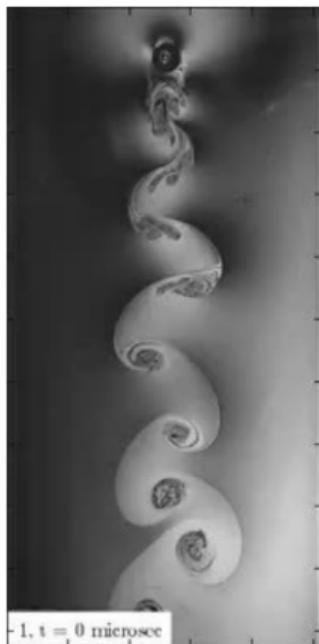
Etapes de la transition derrière un cylindre



41. Circular cylinder at $Re=2000$. At this Reynolds number one first properly speaks of a boundary layer. It is laminar over the front, separates, and breaks up into a turbulent wake. The separation point, moving forward as

the Reynolds number is increased, here now attains their upstream limit, ahead of maximum thickness. Vortexlines in air bubbles in water. ONERA photograph, World © Galois 1977.

Etapes de la transition derrière un cylindre





Propriétés génériques et modélisation



Friction en écoulement turbulent

- Coefficients adimensionnels \rightarrow indépendants de Re .
- Vrai pour « forçage inertiel », ou « écoulement rugueux » (parois perpendiculaires à écoulement).
- Puissance dissipée $\propto \rho U^3 S$, indépendante de la viscosité!

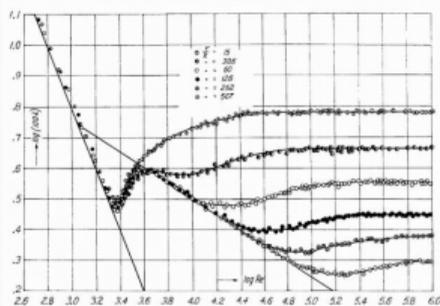
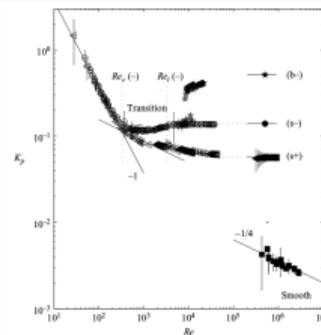
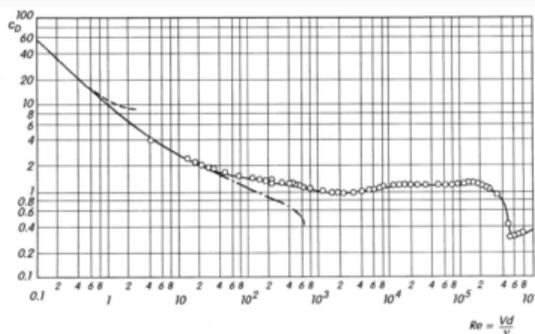


Figure 9.- Relation between $\log(100 \lambda)$ and $\log Re$.

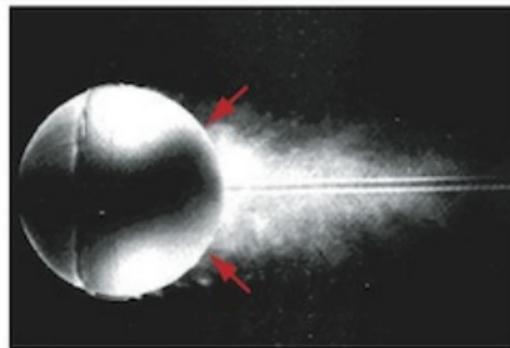
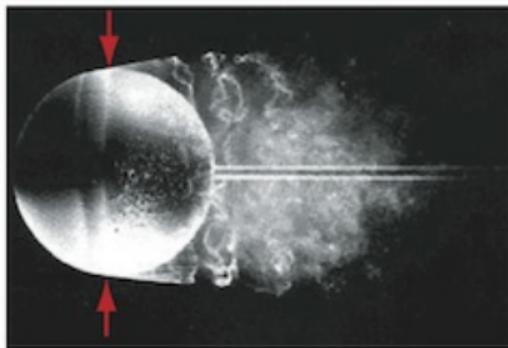
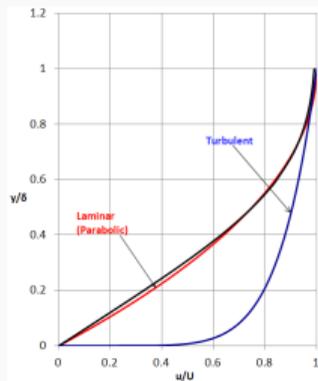


Coeff. de perte de charge en Poiseuille cylindrique. Coeff. de trainée d'un cylindre. Coeff. de couple, écoulement de von Kármán.



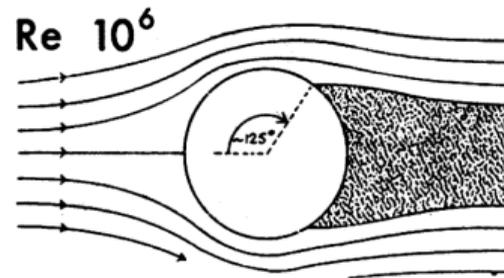
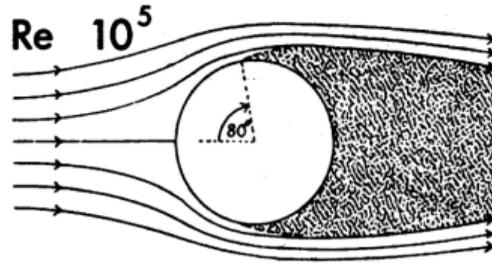
Couches limites laminaires et turbulentes

- Couche limite avec gradient de pression adverse \Rightarrow décollement.
- Décollement retardé pour couche limite turbulente.



Profils de couche limite sans gradient de pression. Visualisation du décollement pour une couche limite laminaire (à gauche) et turbulente (à droite).

Crise de trainée pour la sphère



- ▶ Recollement d'une couche limite turbulente après décollement (et possible relaminarisation)
- ▶ Réduction des zones de séparation dans l'écoulement : phénomène de la **crise de la trainée**

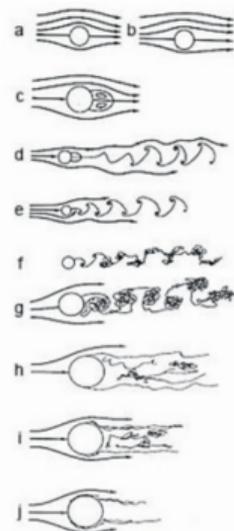
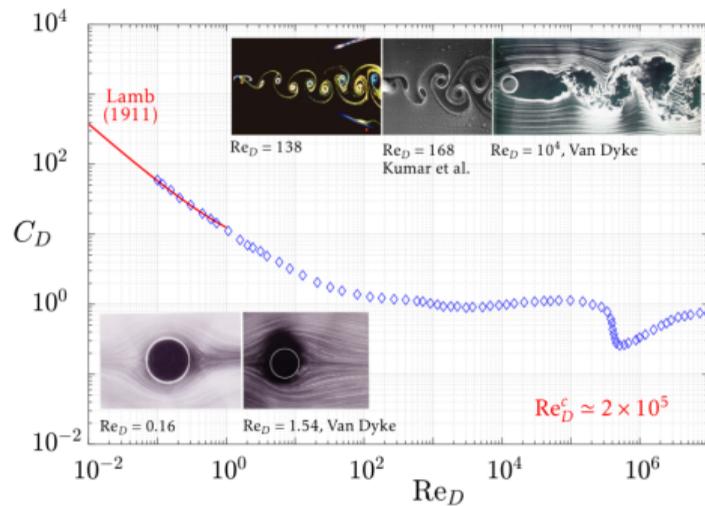
Le point de séparation de la couche limite se déplace en aval, avec une réduction de la trainée totale par rapport au régime laminaire : l'augmentation du frottement causé par la turbulence est compensée par la réduction de la trainée de pression, induite par le sillage turbulent.

Crise de traînée pour la sphère

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$$

D : traînée

S : surface du cylindre projetée dans un plan normal au vecteur vitesse

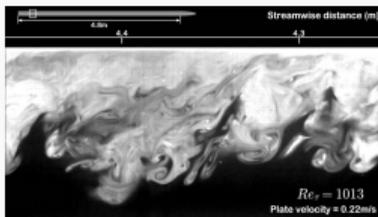




Echelles spatiales

Cascade d'énergie (Richardson).

- Multitude d'échelles spatiales.



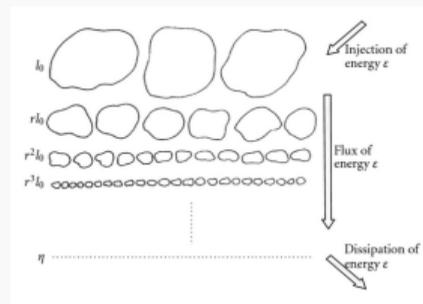
- Structures cohérentes de taille l , de vitesse u_l , de temps de vie $\frac{l}{u_l}$
- Se déstabilisent en structures plus petites, jusqu'à dissiper l'énergie cinétique par viscosité.
- Puissance dissipée massique :

$$\epsilon \propto U^3/L$$

indépendante de la viscosité!

Théorie de Kolmogorov (1941).

- Hypothèse : statistique des mouvements turbulents à petite échelle universelle.



- ϵ est indépendant de ν .
- Argument dimensionnel, à partir de ϵ et ν , on forme :

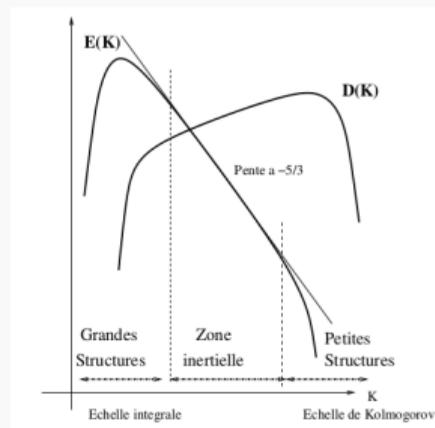
$$\eta = \nu^{3/4} \epsilon^{-1/4}$$

$$U_\eta = (\nu \epsilon)^{1/4}$$



Echelles spatiales

- Echelle d'injection L , vitesse caractéristique U .
 - $U^3/L \simeq \epsilon \Rightarrow \eta = Re^{-3/4}L$.
 - Séparation d'échelles.
 - A $Re = 10^6$, $\eta = 3 \times 10^{-5}L$.
- Simulation numérique directe très vite prohibitive.
- Mais, propriétés statistiques robustes
→ pistes de modélisation



Spectre spatial d'énergie cinétique.



Mélange et corrélation des fluctuations de vitesse

- Ecoulement parallèle (2D) simple, bilan qdm selon x :

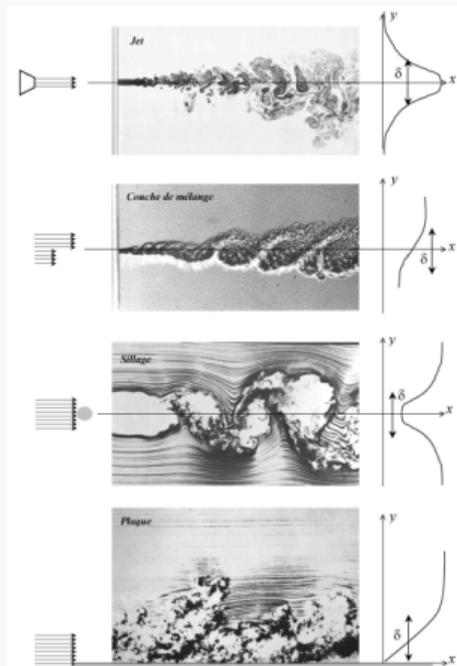
$$\overline{U_x} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{U_x}) + \overline{U_y} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{U_x}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'_y u'_x}) + \nu \frac{\partial^2 \overline{U_x}}{\partial y^2}$$

- Equation pour les fluctuations (fluctuations de pression et termes visqueux négligés) :

$$\frac{\partial u'_x}{\partial t} + u'_y \frac{\partial}{\partial y} (\overline{U_x}) = 0$$

- Modélisation (τ temps turbulent) :

$$u'_x = -\tau u'_y \frac{\partial}{\partial y} (\overline{U_x})$$





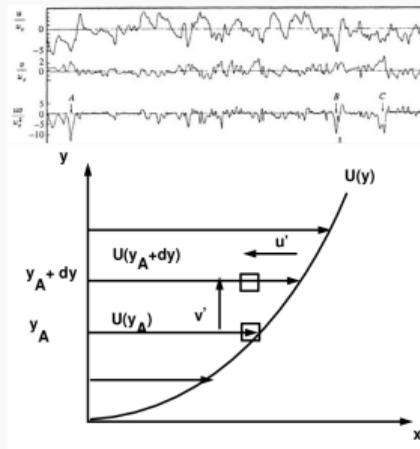
Modèle de viscosité turbulente

- Prenons un écoulement de cisaillement simple.
- On constate que $\overline{u'_y u'_x} < 0$.
- Interprétation physique.
- Terme similaire à une diffusion : les fluctuations transportent et mélangent la qdm moyenne.
- Hypothèse de Boussinesq. On introduit une « viscosité turbulente » :

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial i} + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial j} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

- L'équation pour la moyenne « reprend une forme usuelle » :

$$\overline{\mathbf{U}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(\overline{P} + \frac{2}{3} k \right) + \nabla \cdot \left((\nu + \nu_T(\mathbf{x})) \nabla \overline{\mathbf{U}} \right)$$



Vitesses u et v , produit $u'v'$, Couche limite turbulente.

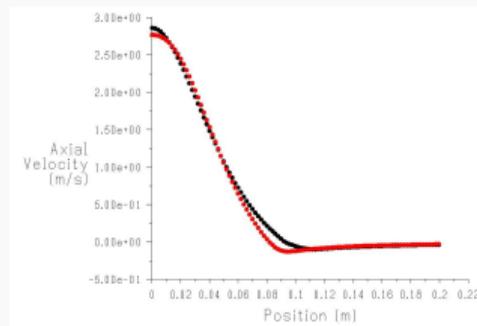
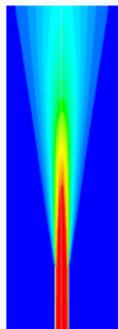
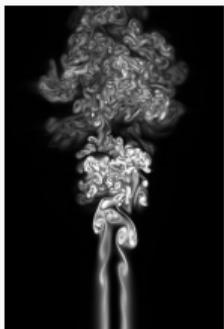
- Argument précédent, k énergie cinétique turbulente et $\tau = k/\epsilon$:

$$-\overline{u'_x u'_y} \propto \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} (\overline{U_x})$$



Modèles de turbulence

- Reynolds-Average Navier-Stokes. Très largement utilisé dans l'industrie.



Simulation par méthode RANS d'un jet turbulent : champ et profil de vitesse moyen.

- Equation pour $\langle U \rangle$: fait apparaître un terme en $\text{div} \langle u' u' \rangle$, le tenseur de Reynolds.
- Problème de fermeture et hypothèse de Boussinesq : viscosité turbulente ν_t .
- Multiples modèles pour ν_t (longueur de mélange, modèles $k - \epsilon$, RSM ...)
- Modèles semi-empiriques, constantes ajustées par expériences de référence (voir poly sur SAVOIR).
- Large Eddy Simulation. **Lourd dans un contexte industriel, peu de recul.**
 - Filtrage des équations et résolution des échelles jusqu'à la taille de la maille.
 - Termes liés aux échelles sous-maillles de la turbulence modélisés.